

**PAUTA TEST N° 4 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA **FECHA : Vi 15/04/11**

(1) Una población $P(t)$ de pequeños roedores tiene una tasa de natalidad $0.001P$ (al mes por roedor) y una tasa de mortalidad constante. Si inicialmente hay 100 roedores y además $P'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tomará a esta población duplicarse.?

(20 puntos).

Solución:

Sea a la tasa de mortalidad constante, luego

$$\frac{dP}{dt} = (0.001P - a) P$$

Por otro lado, sabemos que inicialmente, es decir para $t = 0$, $P(0) = 100$ y además $\frac{dP}{dt}(0) = 8$. Así

$$\frac{dP}{dt}(0) = (0.001 P(0) - a) P(0) = 8 \Rightarrow (0.001 (100) - a) 100 = 8 \Rightarrow$$

$$0.1 - a = \frac{8}{100} \Rightarrow a = 0.1 - \frac{2}{25} \Rightarrow a = \frac{1}{50} = 0.02$$

La ecuación diferencial a resolver es :

$$\frac{dP}{dt} = (0.001P - 0.02) P$$

Resolvamos la ecuación diferencial anterior

$$\frac{dP}{dt} = (0.001P - 0.02) P \Rightarrow \frac{dP}{(0.001P - 0.02) P} = dt \Rightarrow \int \frac{dP}{(0.001P - 0.02) P} = \int dt$$

Ahora

$$\frac{1}{(0.001P - 0.02) P} = \frac{A}{0.001P - 0.02} + \frac{B}{P} \Rightarrow AP + (0.001P - 0.02)B = 1$$

$$P = 0 \Rightarrow -0.02B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{0.02} \Rightarrow B = -50$$

$$P = 20 \Rightarrow 20A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$\text{Luego } \frac{1}{(0.001P-0.02)P} = \frac{0.05}{0.001P-0.02} - \frac{50}{P}$$

Volviendo al proceso de integración.

$$\int \frac{dP}{(0.001P-0.02)P} = \int dt \Rightarrow \int \left[\frac{0.05}{0.001P-0.02} - \frac{50}{P} \right] dP = t + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{0.05}{0.001P-0.02} dP - \int \frac{50}{P} dP = t \Rightarrow$$

$$\frac{0.05}{0.001} \ln(0.001P - 0.02) - 50 \ln(P) = t + c_1 \Rightarrow$$

$$50 [\ln(0.001P - 0.02) - \ln(P)] = t + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln(0.001P - 0.02) - \ln(P) = \frac{1}{50} t + c \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{0.001P-0.02}{P}\right) = \frac{1}{50} t + c \Rightarrow \frac{0.001P-0.02}{P} = k e^{t/50} \Rightarrow$$

$$P(0.001 - k e^{t/50}) = 0.02 \Rightarrow P(t) = \frac{0.02}{0.001 - k e^{t/50}}$$

Sabemos que $P(0) = 100$, luego

$$\frac{0.02}{0.001-k} = 100 \Rightarrow 0.02 = 0.1 - 100k \Rightarrow k = \frac{0.1-0.02}{100} \Rightarrow k = 0.0008$$

Por lo tanto

$$P(t) = \frac{0.02}{0.001-0.0008 e^{t/50}}$$

Veamos cuánto tiempo tomará a la población duplicarse, es decir, llegar a 200 miembros.

$$200 = \frac{0.02}{0.001-0.0008 e^{t/50}} \Rightarrow 200(0.001 - 0.0008 e^{t/50}) = 0.02 \Rightarrow$$

$$0.2 - 0.16e^{t/50} = 0.02 \Rightarrow e^{t/50} = 1.125 \Rightarrow \frac{t}{50} = \ln(1.125) \Rightarrow$$

$$t = 50 \ln(1.125) \approx 5.89$$

Finalmente, le tomará aproximadamente 5.89 meses a la población de roedores duplicarse. $\square$

(2) Un tanque contiene 450 litros de líquido en el que se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 3 gramos por litro se bombea al tanque con una intensidad de 6 litros por minuto, la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con una intensidad de 8 litros por minuto. Encuentre la cantidad y la concentración de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

(20 puntos).

Solución:

Sabemos que si $S(t)$ representa la cantidad de sal en la mezcla, entonces

$$\frac{dS}{dt} = Q_1 C_1 - Q_2 C_2$$

donde Q_1 es la tasa de entrada y C_1 es la concentración de entrada, y Q_2 es la tasa de salida y C_2 la concentración de salida. Además, sabemos que $C_2(t) = \frac{S(t)}{V(t)}$ donde $V(t) = V_0 + (Q_1 - Q_2)t$ representa el volumen de líquido en el tanque en cualquier instante t , con V_0 el volumen inicial de líquido en el tanque.

De acuerdo al enunciado $V_0 = 450$ litros, $C_1 = 3 \text{ gr/lit}$, $Q_1 = 6 \text{ lt/min}$, $Q_2 = 8 \text{ lt/min}$ y $S(0) = 30 \text{ gr}$.

Luego

$$C_2(t) = \frac{S(t)}{V(t)} = \frac{S(t)}{450 + (6-8)t} = \frac{S(t)}{450-2t}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial inicial

$$\frac{dS}{dt} = 6(3) - 8 \frac{S(t)}{450-2t} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 18 - \frac{4S(t)}{225-t} \Rightarrow \frac{dS}{dt} + \frac{4S(t)}{225-t} = 18$$

La anterior es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(t) = \frac{4}{225-t}$ y $q(t) = 18$. Luego

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\int p(t) dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t) dt} dt + c \right] = e^{-\int \frac{4}{225-t} dt} \left[\int 18 e^{\int \frac{4}{225-t} dt} dt + c \right] = \\ &e^{4 \ln(225-t)} \left[\int 18 e^{-4 \ln(225-t)} dt + c \right] = (225-t)^4 \left[\int 18 (225-t)^{-4} dt + c \right] = \\ &(225-t)^4 \left[\frac{18}{3(225-t)^3} + c \right] = 6(225-t) + c(225-t)^4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S(t) = 6(225-t) + c(225-t)^4$

Ahora si ocupamos la condición inicial $S(0) = 30$, se tiene que :

$$S(0) = 1350 + 225^4 c = 30 \Rightarrow c = -\frac{1320}{225^4} \approx -0.515 \times 10^{-6}$$

La cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera es

$$S(t) = 6(225 - t) - 1320 \left(\frac{225-t}{225}\right)^4$$

La concentración de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera es

$$C(t) = \frac{S(t)}{V(t)} = \frac{6(225-t) - 1320 \left(\frac{225-t}{225}\right)^4}{2(225-t)} = 3 - \frac{660}{225} \left(\frac{225-t}{225}\right)^3 \quad \square$$

(3) Obtenga, en un instante t cualquiera, la intensidad de corriente en amperes, de un circuito en serie que contiene una resistencia de 1Ω , una inductancia de $1H$ y una fuerza electromotriz igual a $\alpha \text{sen}(t)$ voltios, donde α es una constante real cualquiera.

(20 puntos).

Solución:

La ecuación diferencial asociada al circuito RL anterior es:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Ahora $L = 1H$, $R = 1\Omega$ y $E(t) = \alpha \text{sen}(t)$. Luego

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + i = \alpha \text{sen}(t)$$

La ecuación anterior es lineal de primer orden con $p(t) = 1$ y $q(t) = \alpha \text{sen}(t)$

$$i(t) = e^{-\int p(t) dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t) dt} dt + c \right] = e^{-t} \left[\int \alpha \text{sen}(t) e^t dt + c \right] =$$

$$e^{-t} \left[\frac{1}{2} \alpha \text{sen}(t) e^t - \frac{1}{2} \alpha \cos(t) e^t + c \right] = \frac{\alpha}{2} (\text{sen}(t) - \cos(t)) + c e^{-t}$$

Además sabemos que $i(0) = 0$, por lo tanto

$$i(0) = -\frac{\alpha}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{\alpha}{2}$$

Finalmente la corriente i en un instante t cualquiera está dada por :

$$i(t) = \frac{\alpha}{2} (\text{sen}(t) - \cos(t)) + \frac{\alpha}{2} e^{-t} \quad \square$$