UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Ju 15/09/11

(1) Obtenga la solución general de la E.D.O. : $(2x^2+y)\,dx+(x^2y-x)\,dy=0$
(20 puntos).

__**Solución:**__
En este caso tenemos que:
$M(x,y)=2x^2+y$
$N(x,y)=x^2y-x$
$M_y=1$
$N_x=2xy-1$

Se observa que $M_y \neq N_x$, de donde concluimos que la ecuación diferencial no es exacta.
Veamos si es posible transformarla en una exacta.

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{2-2xy}{x^2y-x}=\frac{2(1-xy)}{x(xy-1)}=\frac{-2(xy-1)}{x(xy-1)}=\frac{-2}{x}$$

El factor integrante es $\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\,ln(x)}=e^{ln(x^{-2})}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

La nueva ecuación diferencial que ahora sí es exacta está dada por:

$$x^{-2}(2x^2+y)\,dx+x^{-2}(x^2y-x)\,dy=0 \Rightarrow \left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

$$M(x,y)=2+\frac{y}{x^2}$$

$$N(x,y)=y-\frac{1}{x}$$

Sabemos que $F_x = M$ y $F_y = N$

$$F_x = M \Rightarrow F_x = 2 + \frac{y}{x^2} \Rightarrow \int F_x \, dx = \int \left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx \Rightarrow F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + g(y)$$

Luego

$$F_y = N \Rightarrow -\frac{1}{x} + g'(y) = y - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2}$$

De lo anterior concluimos que $F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial

$$(2x^2 + y)\, dx + (x^2 y - x)\, dy = 0$$

es

$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$, donde c es una constante real. $\square$

(2) Resuelva: $-2y + (t + t^3 sen(2y))\, \frac{dy}{dt} = 0$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$$-2y + (t + t^3 sen(2y))\, \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow (-2y)\, dt + (t + t^3 sen(2y))\, dy = 0$$

$$M(t,y) = -2y$$

$$N(t,y) = t + t^3 sen(2y)$$

$$M_y = -2$$

$$N_t = 1 + 3t^2 sen(2y)$$

Se observa que $M_y \neq N_t$, de donde concluimos que la ecuación diferencial no es exacta.

Veamos si es posible transformarla en una exacta.

$$\frac{M_y - N_t}{N} = \frac{-2-1-3t^2\,sen(2y)}{t+t^3 sen(2y)} = \frac{-3-3t^2\,sen(2y)}{t+t^3 sen(2y)} = \frac{-3(1+t^2\,sen(2y))}{t(1+t^2 sen(2y))} = -\frac{3}{t}$$

El factor integrante es $\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t}dt} = e^{-3\,ln(t)} = e^{ln(t^{-3})} = t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

La nueva ecuación diferencial que ahora sí es exacta está dada por:

$$t^{-3}(-2y)\,dt + t^{-3}\,(t + t^3 sen(2y))\,dy = 0 \Rightarrow \left(-\frac{2y}{t^3}\right)dt + \left(\frac{1}{t^2} + sen(2y)\right)dy = 0$$

$$M(x,y) = -\frac{2y}{t^3}$$

$$N(x,y) = \frac{1}{t^2} + sen(2y)$$

Sabemos que $F_t = M$ y $F_y = N$

$$F_t = M \Rightarrow F_t = -\frac{2y}{t^3} \Rightarrow \int F_t\,dt = \int\left(-\frac{2y}{t^3}\right)dt \Rightarrow F(t,y) = \frac{y}{t^2} + g(y)$$

Luego

$$F_y = N \Rightarrow \frac{1}{t^2} + g'(y) = \frac{1}{t^2} + sen(2y) \Rightarrow g'(y) = sen(2y) \Rightarrow g(y) = -\frac{cos(2y)}{2}$$

De lo anterior concluimos que $F(t,y) = \frac{y}{t^2} - \frac{cos(2y)}{2}$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial

$$-2y + (t + t^3 sen(2y))\,\frac{dy}{dt} = 0$$

es

$\frac{y}{t^2} - \frac{cos(2y)}{2} = c$, donde c es una constante real. ❑

(3) Obtenga $y(x)$ si se sabe que : $(e^{2x}\,y^2 - 2x)\,dx + \,e^{2x}\,y\,dy = 0$ y $y(2) = 0$

(20 puntos).

Solución:

En este caso tenemos que:
$M(x,y) = e^{2x}\,y^2 - 2x$
$N(x,y) = \,e^{2x}\,y$

$M_y = 2y\,e^{2x}$
$N_x = 2y\,e^{2x}$

Se observa que $M_y = N_x$, de donde concluimos que la ecuación diferencial es exacta.

Sabemos que $F_x = M$ y $F_y = N$

$$F_y = N \,\Rightarrow F_y = \,e^{2x}\,y \,\Rightarrow \int F_y\,dy = \int \left(e^{2x}\,y\right)dy \Rightarrow F(x,y) = \tfrac{1}{2}e^{2x}y^2 \,+ h(x)$$

Luego

$$F_x = M \Rightarrow e^{2x}y^2 \,+ h'(x) = e^{2x}\,y^2 - 2x \Rightarrow h\,'(x) = \,-\,2x \Rightarrow h(x) = \,-\,x^2$$

De lo anterior concluimos que $F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 - x^2$

La solución general de la ecuación diferencial

$$(e^{2x}\,y^2 - 2x)\,dx + \,e^{2x}\,y\,dy = 0$$

es

$\frac{1}{2}e^{2x}y^2 - x^2 = c$, donde c es una constante real.

Ahora consideremos la condición inicial $y(2) = 0$

$$\tfrac{1}{2}e^{2(2)}\left[y(2)\right]^2 - 2^2 = c \Rightarrow \,-\,4 = c \Rightarrow c = \,-\,4$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial dada es $\frac{1}{2}e^{2x}y^2 - x^2 = \,-\,4$ y si despejamos $y(x)$ se tiene que:

$$\tfrac{1}{2}e^{2x}y^2 - x^2 = \,-\,4 \,\Rightarrow y^2 = e^{-2x}(2x^2 - 8) \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{e^{-2x}(2x^2 - 8)} \;\square$$