UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Vi 08/04/11

(1) Obtenga la solución general de la E.D.O. : $y' - \frac{3}{4}\,y = x \cdot \sqrt[3]{y}$

(20 puntos).

Solución:

$$y' - \frac{3}{4}\,y = x \cdot \sqrt[3]{y} \;\Leftrightarrow\; y' - \frac{3}{4}\,y = x \cdot y^{1/3}$$

La anterior es una ecuación de Bernoulli con $N = \frac{1}{3}$, $p(x) = -\frac{3}{4}$ y $q(x) = x$
La sustitución a usar es : $v = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$

$$v = y^{2/3} \Rightarrow y = v^{3/2}$$

Ahora

$$v(x) = e^{-\int (1-N)\,p(x)\,dx} \cdot \left[\int (1-N)\,q(x)\; e^{\int (1-N)\,p(x)\,dx}\; dx \,+ c \right] \Rightarrow$$

$$v(x) = e^{-\int \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)dx} \cdot \left[\int \frac{2}{3}\,x\; e^{\int \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)dx}\; dx \,+ c \right] \Rightarrow$$

$$v(x) = e^{x/2} \cdot \left[\frac{2}{3}\int x\; e^{-x/2}\; dx \,+ c \right] \Rightarrow$$

$$v(x) = e^{x/2} \cdot \left[\frac{2}{3}\Big(-2(2+x) \Big)\, e^{-x/2} + c \right] \Rightarrow v(x) = -\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\,x + c\,e^{x/2}$$

Finalmente : $y(x) = \left[-\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\,x + c\,e^{x/2} \right]^{3/2}$ ❑

(2) Calcule $T(5)$ si se sabe que $\frac{dT}{dt} = 10 - \frac{T}{10}$ y $T(0) = 10$.

(20 puntos).

Solución:

$\frac{dT}{dt} = 10 - \frac{T}{10} \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{10} = 10$

La ecuación anterior es lineal de primer orden con $p(t) = \frac{1}{10}$ y $q(t) = 10$. Luego

$$T(t) = e^{-\int p(t)\,dt} \cdot \left[\int q(t)\; e^{\int p(t)\,dt}\, dt + c \right] \Rightarrow$$

$$T(t) = e^{-\int \frac{1}{10}\,dt} \cdot \left[\int 10\, e^{\int \frac{1}{10}\,dt}\, dt + c \right] \Rightarrow T(t) = e^{-t/10} \cdot \left[10 \int e^{t/10}\, dt + c \right] \Rightarrow$$

$$T(t) = e^{-t/10} \cdot \left[10\, \frac{e^{t/10}}{1/10} + c \right] \Rightarrow T(t) = e^{-t/10} \cdot \left[100\, e^{t/10} + c \right] \Rightarrow$$

$$T(t) = 100 + c\, e^{-t/10}$$

Ahora, usando la condición inicial $T(0) = 10$, se tiene que :

$T(0) = 100 + c = 10 \Rightarrow c = 10 - 100 \Rightarrow c = -90$

Por lo tanto

$$T(t) = 100 - 90\, e^{-t/10}$$

Finalmente : $T(5) = 100 - 90\, e^{-5/10} = 100 - 90\, e^{-1/2} \approx 45.41$ $\square$

(3) Obtenga $y(x)$ si se sabe que : $x\, \frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}\, y = x - 1$

(20 puntos).

Solución:

$x\, \frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}\, y = x - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x(x+1)}\, y = \frac{x-1}{x}$

Observamos que la ecuación anterior es lineal de orden 1, con $p(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$ y $q(x) = \frac{x-1}{x}$

Luego

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \left[\int q(x)\; e^{\int p(x)\,dx}\; dx\; + c \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx} \cdot \left[\int \frac{x-1}{x}\; e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx}\; dx\; + c \right]$$

Por otro lado

$$\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx\; = ln(x) + ln(x+1) = ln(x(x+1))$$

pues $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

Volviendo al cálculo de $y(x)$:

$$y(x) = e^{-\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx} \cdot \left[\int \frac{x-1}{x}\; e^{\int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx}\; dx\; + c \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-ln(x(x+1))} \cdot \left[\int \frac{x-1}{x}\; e^{ln(x(x+1))}\; dx\; + c \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \left[\int \frac{x-1}{x}\; x(x+1)\, dx\; + c \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \left[\int (x-1)(x+1)\, dx\; + c \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \left[\int (x^2-1)\, dx\; + c \right] \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x(x+1)} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x + c \right] \Rightarrow$$

$y(x) = \frac{x^2}{3(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} + c\,\frac{1}{x(x+1)}$, con c constante real. ❑