UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Ju 08/09/11

(1) Obtenga la solución general de la E.D.O. : $3M^2P = \frac{dP}{dM}$

(20 puntos).

Solución:

$$3M^2P = \frac{dP}{dM} \Rightarrow 3\,M^2\,dM = \frac{dP}{P} \Rightarrow \int 3\,M^2\,dM = \int \frac{dP}{P} \Rightarrow M^3 + c = ln(P) \Rightarrow$$

$$P(M) = e^c\,e^{M^3} \Rightarrow P(M) = k\,e^{M^3}$$

Finalmente $P(M) = k\,e^{M^3}$, con k una constante real positiva. ❑

(2) Obtenga la solución del P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\,cos^2(\frac{y}{x})}{x}$$

$$y(1) = \frac{\pi}{4}$$

(20 puntos).

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\,cos^2(\frac{y}{x})}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + cos^2(\frac{y}{x})$$

Ahora si hacemos $v = \frac{y}{x}$, se tiene que $y = v\,x$ y además $\frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}$

Luego

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + cos^2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow v + x\,\frac{dv}{dx} = v + cos^2(v) \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx} = cos^2(v) \Rightarrow \frac{dv}{cos^2(v)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{dv}{cos^2(v)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int sec^2(v)\,dv\; = ln(x) \Rightarrow tg(v) = ln(x) + c \Rightarrow$

$tg\left(\frac{y}{x}\right) = ln(x) + c$

Ahora se sabe que $y(1) = \frac{\pi}{4}$, por lo tanto

$tg\left(\frac{y(1)}{1}\right) = ln(1) + c \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + c \Rightarrow c = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow c = 1$

Finalmente la solución del P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\,cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$$

$$y(1) = \frac{\pi}{4}$$

está dada por la ecuación $tg\left(\frac{y}{x}\right) = ln(x) + 1$ o en forma explícita por

$y(x) = x\,Arctg(ln(x) + 1)$ ❑

(3) Obtenga $y(t)$ si se sabe que : $(1 + t^2 + y^2 + t^2y^2)\,dy = (1 + y^2)\,dt$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$(1 + t^2 + y^2 + t^2y^2)\,dy = (1 + y^2)\,dt \Rightarrow \left[(1 + t^2) + y^2(1 + t^2)\right]dy = (1 + y^2)\,dt \Rightarrow$

$(1 + y^2)(1 + t^2)\,dy = (1 + y^2)\,dt \Rightarrow (1 + t^2)\,dy = dt \Rightarrow dy = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow$

$\int dy = \int \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow y(t) = Arctg(t) + c$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial

$(1 + t^2 + y^2 + t^2y^2)\,dy = (1 + y^2)\,dt$

es la función $y(t) = Arctg(t) + c$ ❑