UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Vi 01/04/11

(1) Obtenga la solución general de la E.D.O. : $(y+x+2)\,dx\,+dy=0$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$M(x,y)=x+y+2$
$N(x,y)=1$

Tenemos que :
$M_y-N_x=1-0=1\neq 0$

Luego la ecuación diferencial original no es exacta. Veamos si es posible obtener un factor integrante.

$p(x)=\frac{1}{N(x,y)}\,(M_y-N_x)=1$

Podemos asumir que depende sólo de x o sólo de y. Supondremos que depende sólo de x.

$\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\int dx}=e^{x}$

La nueva ecuación diferencial a resolver es :

$(y+x+2)\,e^{x}\,dx\,+e^{x}\,dy=0$

$M(x,y)=\,(y+x+2)\,e^{x}$

$N(x,y)=e^{x}$

Calculemos la función F :

$F_x = M \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \Rightarrow$

$F(x,y) = \int \; (y + x + 2)\,e^x\,dx + g(y) \Rightarrow$

$F(x,y) = y\,e^x + x\,e^x - e^x + 2\,e^x + g(y) \Rightarrow$

$F(x,y) = y\,e^x + x\,e^x + e^x + g(y)$

Ahora $F_y = N$, luego :

$e^x + g'(y) = e^x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c_1$

Por lo tanto

$F(x,y) = y\,e^x + x\,e^x + e^x + c_1$

La solución de la ecuación diferencial original está dada en forma implícita por $F(x,y) = c_2$

Se tiene que la solución general dada en forma implícita es

$y\,e^x + x\,e^x + e^x + c_1 = c_2 \Rightarrow y\,e^x + x\,e^x + e^x = c$, con $c = c_2 - c_1$

Despejando $y(x)$ se tiene finalmente que :

$y(x) = c\,e^{-x} - x + 1$, con c una constante real. ❑

(2) Obtenga la solución del P.V.I.

$$\frac{dP}{dt} - 0.12\,P = 0$$

$$P(6) = 2$$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$\frac{dP}{dt} - 0.12\,P = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0.12\,P \Rightarrow \frac{dP}{P} = 0.12\,dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int 0.12\,dt \Rightarrow$

$ln(P) = 0.12\,t + c \Rightarrow P(t) = \; e^c\,e^{0.12\,t} = k\,e^{0.12\,t}$

Consideremos la condición inicial :

$P(6) = k\, e^{0.72} = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{e^{0.72}} \approx 0.9735$

Por lo tanto la solución del P.V.I. es :

$P(t) = \frac{2}{e^{0.72}}\, e^{0.12\, t}$ ❑

(3) Obtenga $x(t)$ si se sabe que : $(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)\, dx = 0$

(20 puntos).

Solución:

Veamos si es exacta.

$M(t,x) = 2x^2t - 2x^3$

$N(t,x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2$

$M_x - N_t = 4xt - 6x^2 - (\,-6x^2 + 4xt) = 0$

Vemos que es una ecuación diferencial exacta.

$F(t,x) = \int M(t,x)\, dt + g(x) \Rightarrow$

$F(t,x) = \int (2x^2t - 2x^3)\, dt + g(x) \Rightarrow F(t,x) = 2x^2 \int t\, dt - 2x^3 \int dt + g(x) \Rightarrow$

$F(t,x) = x^2\, t^2 - 2\, x^3\, t + g(x)$

Ahora usemos el hecho que $F_x = N$

$F_x = 2\, x\, t^2 - 6\, x^2\, t + g'(x) = 4x^3 - 6\, x^2 t + 2\, x\, t^2 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 \Rightarrow g(x) = x^4$

Por lo tanto : $F(t,x) = x^2\, t^2 - 2\, x^3\, t + x^4$

La solución general dada en forma implícita es :

$F(t,x) = c \Rightarrow x^2\, t^2 - 2\, x^3\, t + x^4 = c$, con c una constante real. ❑