UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
***Juan Carlos Sandoval Avendaño***

# PAUTA TEST Nº 1 ECUACIONES DIFERENCIALES
## INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

**NOMBRE :__________________________________________ PTOS. :________**
**TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Vi 25/03/11**

**(1)** Obtenga la solución general de la E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$$

**(20 puntos).**

**Solución:**

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6} \Rightarrow dy(x-y-6) = (x+y+4)\,dx \Rightarrow$

$(x+y+4)\,dx + (-x+y+6)\,dy = 0$

La ecuación diferencial anterior es de coeficientes lineales, por lo tanto debemos realizar las sustituciones

$x = z - h$
$y = w - k$

donde $h$ y $k$ se obtienen resolviendo el sistema

$h + k = 4$
$-h + k = 6$

Sumando las ecuaciones anteriores

$2k = 10 \Rightarrow k = 5$

$h = 4 - k \Rightarrow h = 4 - 5 \Rightarrow h = -1$

Luego

$x = z + 1 \Rightarrow z = x - 1 \Rightarrow dz = dx$

$y = w - 5 \Rightarrow w = y + 5 \Rightarrow dw = dy$

Así

$$(x+y+4)\,dx + (-x+y+6)\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$(z+1+w-5+4)\,dz + (-z-1+w-5+6)\,dw = 0 \Rightarrow$$

$$(z+w)\,dz + (-z+w)\,dw = 0$$

Esta última ecuación es de coeficientes homogéneos. Hacemos la sustitución $z = vw$ y se obtiene, notando que $M(z,w) = z+w$ y $N(z,w) = -z+w,$ lo siguiente

$$-ln(w) = \int \frac{M(v,1)}{N(v,1)+v\,M(v,1)}\,dv \Rightarrow -ln(w) = \int \frac{v+1}{-v+1+v\,(v+1)}\,dv \qquad (*)$$

Ahora

$$\int \frac{v+1}{-v+1+v\,(v+1)}\,dv = \int \frac{v+1}{v^2+v-v+1}\,dv = \int \frac{v+1}{v^2+1}\,dv = \int \frac{v}{v^2+1}\,dv + \int \frac{1}{v^2+1}\,dv =$$

$$\frac{1}{2}ln(v^2+1) + Arctg(v) + c$$

Reemplazando en $(*)$ se tiene que :

$$-ln(w) = \frac{1}{2}ln(v^2+1) + Arctg(v) + c$$

Volviendo a las variables originales $x$ y $y,$ notando que $v = \frac{z}{w} = \frac{x-1}{y+5},$ se tiene que :

$$-ln(w) = \frac{1}{2}ln(v^2+1) + Arctg(v) + c =$$

$$-ln(y+5) = \frac{1}{2}ln(\left[\frac{x-1}{y+5}\right]^2 + 1) + Arctg(\frac{x-1}{y+5}) + c$$

La expresión anterior nos entrega la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$ dada en forma implícita. ❏

**(2)** Obtenga la solución del P.V.I.

$$\frac{dv}{dt} - tv = t$$

$$v(1) = -1$$

**(20 puntos).**

**Solución:**

$$\frac{dv}{dt} - tv = t \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = t + t\,v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = t(1+\;v) \Rightarrow \frac{dv}{(1+v)} = t\;dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{(1+v)} = \int t\;dt \Rightarrow\; ln(1+v) = \frac{1}{2}\,t^2 + c \Rightarrow 1 + v = k\,e^{t^2/2}\text{, con } k = e^c \;\;\Rightarrow$$

$$v(t) = k\,e^{t^2/2} - 1$$

Consideremos la condición inicial $v(1) = \;-1$ :

$$v(1) = k\,e^{1/2} - 1 = \;-1 \Rightarrow k\,e^{1/2} = 0 \Rightarrow k = 0$$

Pero $k = e^c > 0,$ lo que muestra que el P.V.I. no posee solución. $\square$

**(3)** Resuelva : $(x+y-6)\,dy = (x+y+4)\,dx$

**(20 puntos).**

**Solución:**

$$(x+y-6)\,dy = (x+y+4)\,dx \Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$$

Observamos que esta ecuación es de argumento lineal, luego haciendo

$$z = ax + by = x + y,$$

se tiene que $G(z) = \frac{z+4}{z-6}$ y además :

$$y(x) = \int \frac{G(z)}{a+b\,G(z)}\;\; dz = \int \frac{\frac{z+4}{z-6}}{1+\frac{z+4}{z-6}}\;\; dz = \int \frac{\frac{z+4}{z-6}}{\frac{z-6+z+4}{z-6}}\;\; dz = \int \frac{\frac{z+4}{z-6}}{\frac{2z-2}{z-6}}\;\; dz =$$

$$\int \frac{z+4}{2z-2}\;\; dz = \frac{1}{2}\int \frac{z+4}{z-1}\;\; dz$$

Ahora :

$$z + 4 : z - 1 = 1$$
$$^{(-)}z - {}^{(+)}1$$
$$-------$$
$$5$$

Así $\frac{z+4}{z-1} = 1 + \frac{5}{z-1}$

Volviendo a la integral

$$y(x) = \frac{1}{2}\int \frac{z+4}{z-1}\ dz = \frac{1}{2}\int 1\, dz + \frac{1}{2}\int \frac{5}{z-1}\, dz = \frac{1}{2}z\ + \frac{5}{2}\, ln(z-1) + c\ \Rightarrow^{z=x+y}$$

$y(x) = \frac{1}{2}(x + y(x))\ + \frac{5}{2}\, ln(x + y(x) - 1) + c$, con $c$ una constante real.

La expresión anterior muestra la solución general, dada en forma implícita, de la ecuación diferencial $(x + y - 6)\, dy = (x + y + 4)\, dx$ $\square$