UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

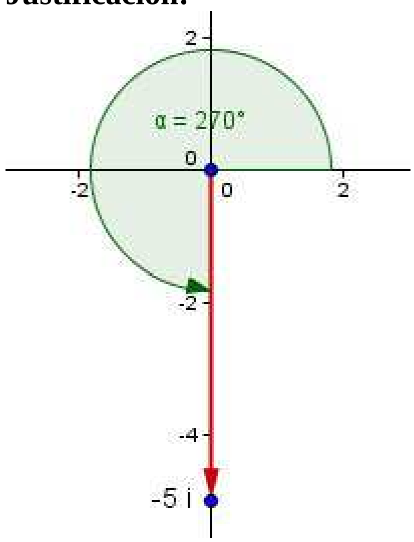
PAUTA PRUEBA Nº 3 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 17/06/09

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ Si $z = b\,i$, con $b \in \mathbb{R}$, entonces $z = |\,z\,|\,cis(90°)$
Justificación:



$z = -5i = 0 - 5\,i$ es un número complejo de la forma $z = b\,i$, con $b \in \mathbb{R}$, pero de la gráfica observamos que $\alpha = Arctg(\frac{b}{a}) = Arctg(\frac{-5}{0}) = 270° \neq 90°$ $\square$

$b)$ __F__ Si $p(x) = 2x^4 - 6a\,x^3 + 4b\,x^2 - 1$, entonces los valores de a y b, de modo que 1 sea raíz del polinomio dado y al dividir $p(x)$ por $x+3$ el resto sea 10, son positivos.
Justificación:
Si $x = 1$ es raíz del polinomio, entonces $p(1) = 0$, es decir:
$2\,(1)^4 - 6a\,(1)^3 + 4b\,(1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 6a + 4b - 1 = 0 \Rightarrow$
$-6a + 4b = -1$ $\qquad (1)$

Ahora, sabemos que si dividimos $p(x)$ por $x+1$ el esto es 10.
$2x^4 - 6a\,x^3 + 4b\,x^2 - 1 \ : \ x+3 = 2x^3 - (6+6a)\,x^2 + (4b+18+18a)\,x - (12b+54+54a)$
$^{(-)}2x^4 + {}^{(-)}6x^3$
$------------$
$-(6+6a)\,x^3 + 4b\,x^2 - 1$

$$-\,{}^{(+)}(6+6a)\,x^3-{}^{(+)}3\,(6+6a)\,x^2$$

$$-------------------$$

$$(4b+18+18a)\,x^2-1$$
$${}^{(-)}(4b+18+18a)\,x^2+{}^{(-)}3(4b+18+18a)\,x$$

$$------------------------------$$

$$-\ (\,12b+54+54a)\,x-1$$
$$-\,{}^{(+)}(12b+54+54a)\,x-{}^{(+)}3(12b+54+54a)$$

$$---------------------------------------$$

$$36b+162+162a-1$$

Sabemos que el resto es 10, luego $36b+162+162a-1=10 \quad \Rightarrow$

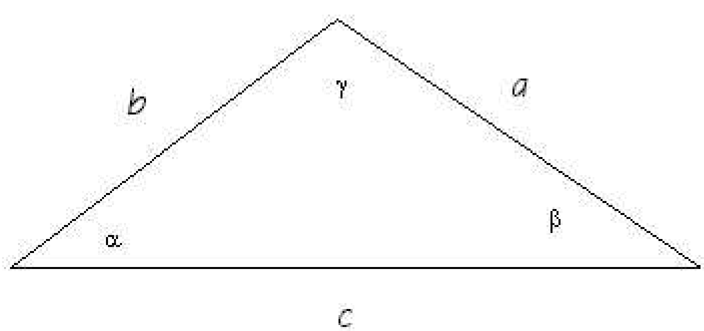
$162a+36b=-151$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(2)$

De (1) y (2) : $-6a+4b=-1$
$\qquad\qquad\qquad 162a+36b=-151$

Multiplicando la primera ecuación por (-9) se tiene : $54a-36b=9$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 162a+36b=-151$

Sumando las ecuaciones anteriores : $216\,a=-142 \Rightarrow a=-\frac{142}{216}=-\frac{71}{108}<0$
Esto muestra que al menos una de las constantes es negativa (en realidad la otra también lo es porque $b=-\frac{89}{72}$) $\square$

$c)$ __V__ Si en un triángulo de vértices A, B, C se tiene que $\alpha=2\beta$, entonces $a^2-b^2=bc$
Justificación:



Observemos que $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.
Ahora, del teorema del seno, $\frac{sen(\alpha)}{a}=\frac{sen(\beta)}{b}=\frac{sen(\gamma)}{c}\ \Rightarrow$

$$\frac{sen(\alpha)}{a}=\frac{sen(\beta)}{b}=\frac{sen(\pi-(\alpha+\beta))}{c}$$

Pero,

$sen(\pi - (\alpha+\beta)) = sen\pi \; cos(\alpha+\beta) \; - sen(\alpha+\beta)\, cos\pi =$

$0\, cos(\alpha+\beta) \; - sen(\alpha+\beta)\,(- 1) = sen(\alpha+\beta)$

Luego, $\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\pi-(\alpha+\beta))}{c} \Rightarrow$

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\alpha+\beta)}{c} \Rightarrow (\alpha = 2\beta)$$

$$\frac{sen(2\beta)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(3\beta)}{c} \Rightarrow$$

$$\frac{2\, sen(\beta)\, cos(\beta)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{3\, sen(\beta) - 4\, sen^3(\beta)}{c},$$

pues, $sen(2\beta) = 2\, sen(\beta)\, cos(\beta)$ y $sen(3\beta) = 3\, sen(\beta) - 4\, sen^3(\beta)$

$$\frac{2\, sen(\beta)\, cos(\beta)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} \Rightarrow \frac{2\; cos(\beta)}{a} = \frac{1}{b} \Rightarrow 2\; cos(\beta) = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{3\, sen(\beta) - 4\, sen^3(\beta)}{c} \Rightarrow \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\beta)(3 - 4\, sen^2(\beta))}{c} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b} = \frac{3 - 4\, sen^2(\beta)}{c} \qquad (2)$$

De (2),

$$\frac{1}{b} = \frac{3 - 4\, sen^2(\beta)}{c} = \frac{3 - 4\,(1 - cos^2(\beta))}{c} = \frac{3 - 4 + 4\, cos^2(\beta)}{c} = \frac{4\, cos^2(\beta) - 1}{c} =$$

$$\frac{(2\, cos(\beta) - 1)\,(2\, cos(\beta) + 1)}{c} = \frac{(\frac{a}{b} - 1)\,(\frac{a}{b} + 1)}{c} = \frac{(\frac{a-b}{b})\,(\frac{a+b}{b})}{c} = \frac{(a-b)(a+b)}{b^2\, c} =$$

$\frac{a^2 - b^2}{b^2\, c} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b^2\, c} \Rightarrow bc = a^2 - b^2$, que es lo que aparece como resultado en el enunciado. $\square$

$d)$ __F__ El valor exacto de $sen\Big(\frac{1}{2}\, Arccos(\frac{4}{5}) + 2\, Arcsen(\frac{1}{4})\Big)$ es $\frac{7\sqrt{10} + 30}{80}$

Justificación:

Sean $\alpha = Arccos(\frac{4}{5})$ y $\beta = Arcsen(\frac{1}{4})$.

Luego, $cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, $\alpha \in [\, 0, \pi\,]$, es decir, $P(\alpha) \in I$ ó II cuadrante, luego $P(\frac{\alpha}{2}) \in I$ cuadrante, pues $\frac{\alpha}{2} \in [\, 0, \frac{\pi}{2}\,]$

$sen(\beta) = \frac{1}{4},\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, es decir, $P(\beta) \in I$ ó IV cuadrante,
pero $sen(\beta) = \frac{1}{4} > 0$, por tanto, $P(\beta) \in I$ cuadrante, y $P(2\beta) \in I$ ó II cuadrante.

Debemos calcular el valor exacto de
$sen(\frac{\alpha}{2} + 2\beta) = sen(\frac{\alpha}{2})\, cos(2\beta) + sen(2\beta)\ cos(\frac{\alpha}{2}) =$

$$\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}\ (cos^2\beta - sen^2\beta) + 2\, sen\beta\, cos\beta\ \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}\ (1 - 2sen^2\beta) + 2\, sen\beta \sqrt{1 - sen^2\beta}\ \sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}\ (1 - 2\,\frac{1}{16}) + 2\,\frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{16}}\ \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\,\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{15}}{4}\,\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{7}{8\sqrt{10}} + \frac{3\sqrt{15}}{8\sqrt{10}} = \frac{7+3\sqrt{15}}{8\sqrt{10}}\ \square$$

$e)$ ___V___ Hay exactamente tres valores de $x \in [0, \pi]$ tales que $cos(x) + cos(3x) = 0$
Justificación:
Sabemos que : $cos(\alpha) + cos(\beta) = 2\, cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\, cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
Luego : $cos(x) + cos(3x) = 2\, cos(\frac{x+3x}{2})\, cos(\frac{x-3x}{2}) = 2\, cos(\frac{4x}{2})\, cos(\frac{-2x}{2}) =$

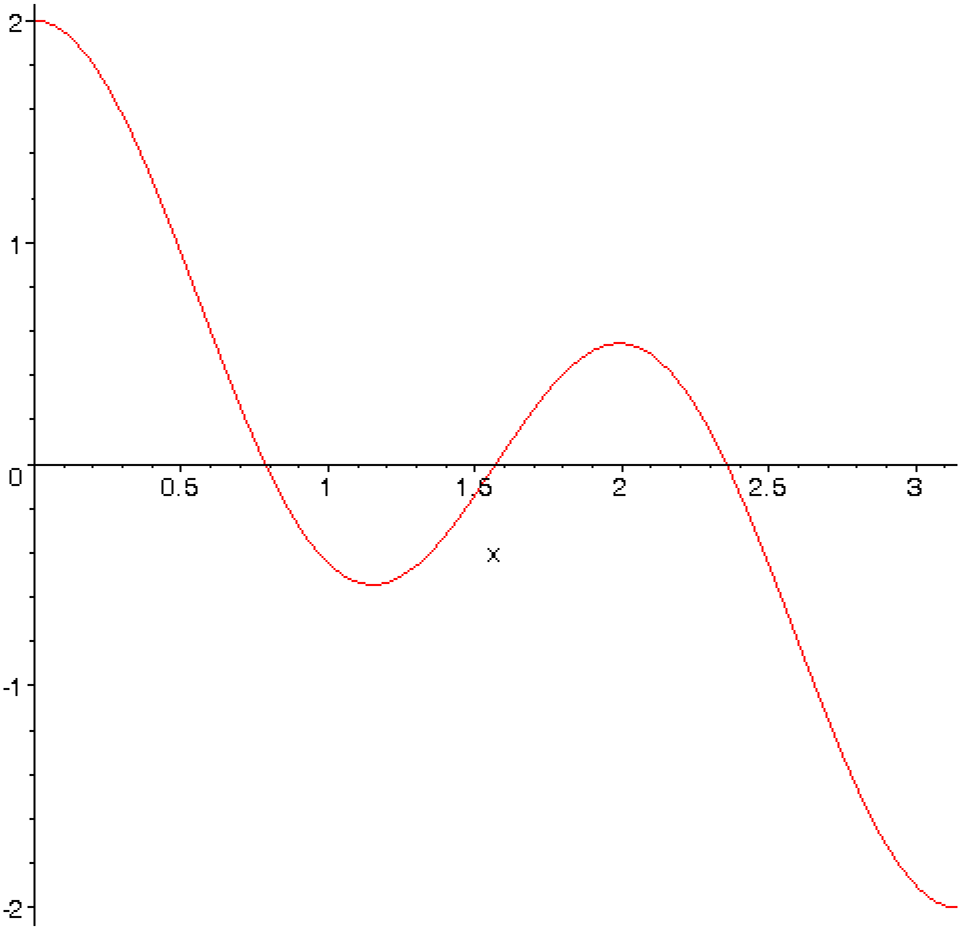
$$2\, cos(2x)\, cos(-x) = 2\, cos(2x)\, cos(x)$$

Así: $cos(x) + cos(3x) = 0 \Rightarrow 2\, cos(2x)\, cos(x) = 0 \Rightarrow cos(2x)\, cos(x) = 0 \Rightarrow$

$$cos(2x) = 0 \ \vee cos(x) = 0 \Rightarrow 2x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \vee x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x = (2k+1)\,\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \vee x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}$$

Notamos que hay exactamente tres valores de $x \in [0, \pi]$ tales que $cos(x) + cos(3x) = 0$
La gráfica es (esto no es necesario que este incluido en el desarrollo) :



$f)$ __V___ $\frac{cos(\alpha)}{1+sen(\alpha)} + \frac{cos(\alpha)}{1-sen(\alpha)} \equiv 2\,sec(\alpha)$

Justificación:

$$\frac{cos(\alpha)}{1+sen(\alpha)} + \frac{cos(\alpha)}{1-sen(\alpha)} \equiv \frac{cos(\alpha)(1-sen(\alpha))+cos(\alpha)(1+sen(\alpha))}{(1+sen(\alpha))(1-sen(\alpha))} \equiv$$

$$\frac{cos(\alpha)-cos(\alpha)\,sen(\alpha)+cos(\alpha)+sen(\alpha)\,cos(\alpha)}{(1-sen^2(\alpha))} \equiv \frac{2\,cos(\alpha)}{cos^2(\alpha)} \equiv \frac{2}{cos(\alpha)} \equiv 2\,sec(\alpha)\ \square$$

(60 puntos).