UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

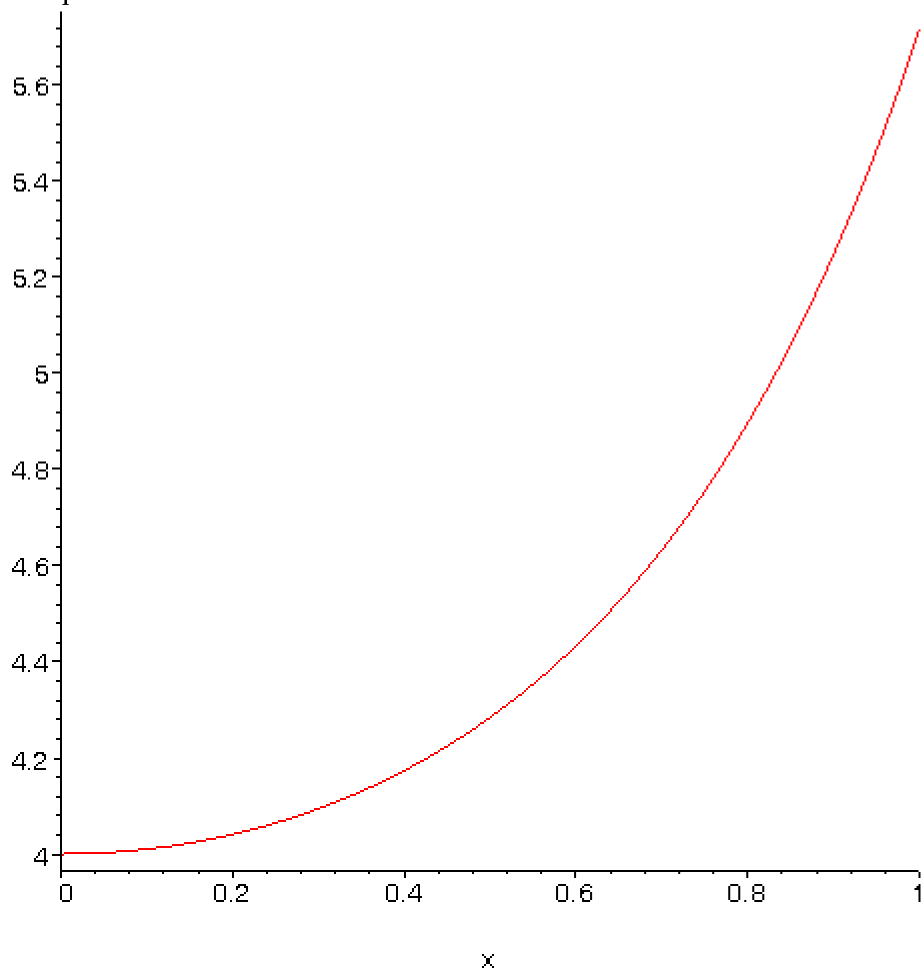
PAUTA PRUEBA Nº 2 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Mi 20/05/09

Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ La función $J : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con $J(t) = e^{t^2} + 3$ posee inversa.
Justificación:
Grafiquemos la función :



Notamos que la función es inyectiva, pero no es sobreyectiva porque $Cod(f) = \mathbb{R} \neq Rec(f) = [4, +\infty)$, luego no posee inversa. $\square$

$b)$ __F__ Si $f(x) = log_{10}(x-1)$, entonces $f(-x^2) = \frac{1}{log_{10}(1+x^2)}$

Justificación:

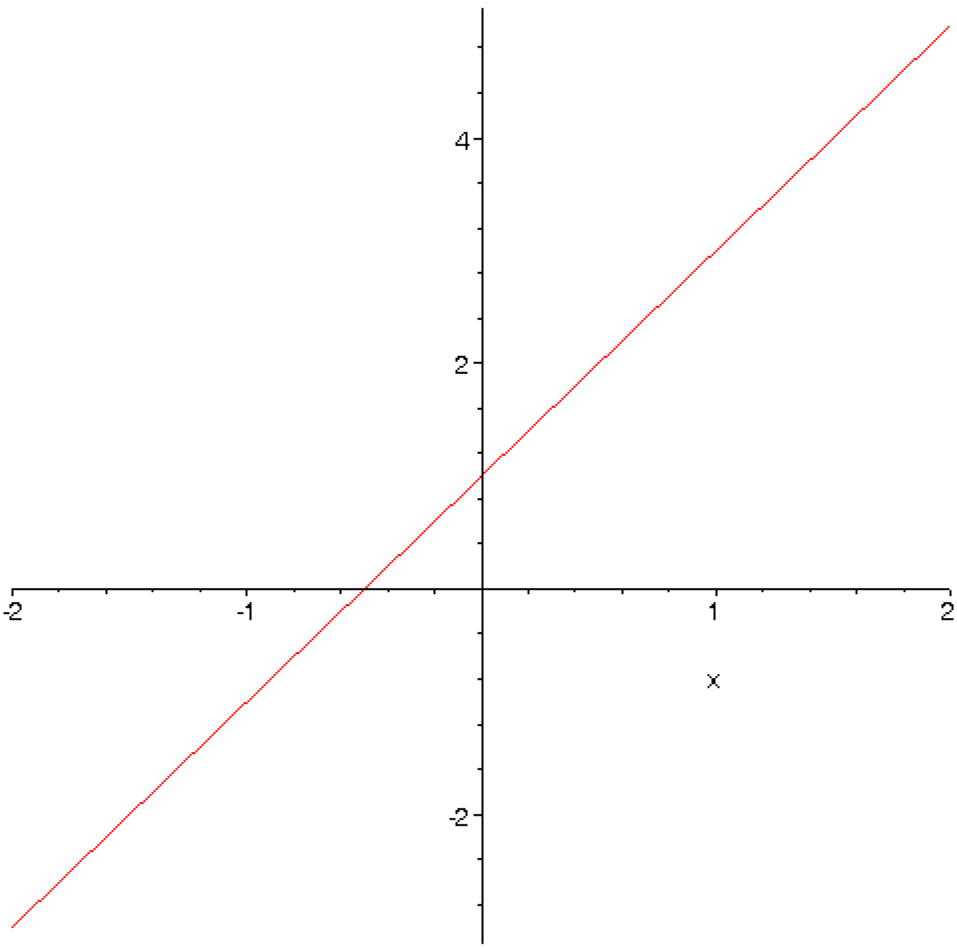
$f(-x^2) = log_{10}(-x^2-1) = log_{10}((-1)\cdot(x^2+1)) = log_{10}(-1) + log_{10}(x^2+1)$

Ahora notamos que $log_{10}(-1)$ no existe por lo que $f(-x^2)$ no existe, y por lo tanto no puede ser igual a $\frac{1}{log_{10}(1+x^2)}$ ❑

$c)$ __F__ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1 \Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}$

Justificación:

Grafiquemos la función :



Vemos de la gráfica que la función es inyectiva porque cualquier recta paralela al eje horizontal cortará a la recta en un solo punto; y además es sobreyectiva porque $Cod(f) = \mathbb{R} = Rec(f)$.

Para calcular la ley que rige a la inversa, hacemos $y = f(x)$ y despejamos x :

$y = f(x) \Rightarrow y = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$

Luego la inversa está dada por :

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \neq x - \frac{1}{2}$ ❑

$d)$ __F__ Si $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^3$, entonces $(g \circ f)(x) = 9\,x^3$
Justificación:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^3 = 27x^3 \neq 9x^3$ ❑

$e)$ __F__ La ecuación $e^x - e^{-x} = a$, con $a > 0$, posee siempre tres soluciones reales.
Justificación:
$e^x - e^{-x} = a \Rightarrow e^x - e^{-x} - a = 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} - a = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 1 - a\,e^x = 0 \Rightarrow$

$$(e^x)^2 - a\,e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2} \ \Rightarrow \begin{cases} e^x = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} \\ e^x = \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} \end{cases}$$

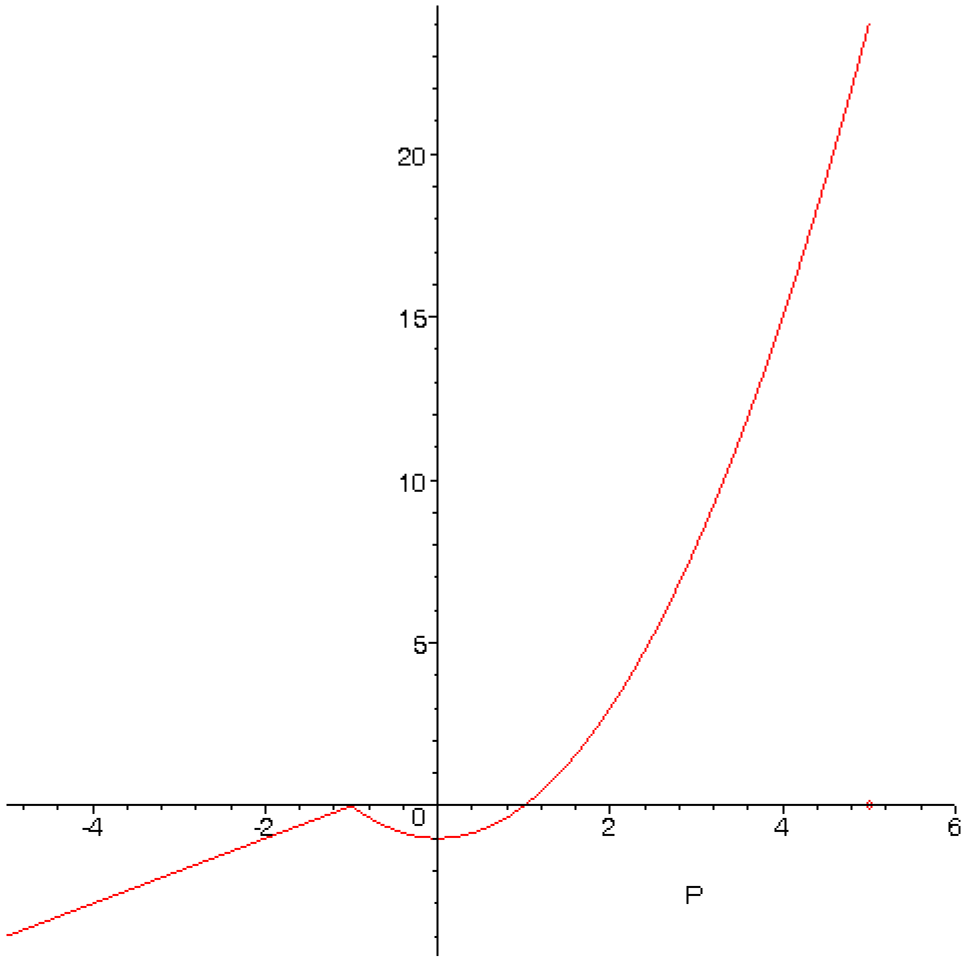
Observamos que el segundo caso no puede darse porque $\sqrt{a^2+4} > a$, es decir, $a - \sqrt{a^2+4} < 0$ y sabemos que $e^x > 0$ cualquiera sea el x real considerado.

La única solución la obtenemos de la igualdad : $e^x = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

$$e^x = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} \Rightarrow x = ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)$$

Esto muestra que la ecuación no posee tres soluciones reales, como se indicaba. ❑

$f)$ __F__ Si $g(P) = \begin{cases} P+1 & ,\ P < -1 \\ P^2 - 1 & ,\ -1 \leq P < 5 \end{cases}$, entonces $Rec(g) = \mathbb{R}$
Justificación:
La gráfica de la función es :



Notemos que $g(5) = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24.$
Observamos que $Rec(g) = (-\infty, 24) \neq \mathbb{R}$ $\square$

(60 puntos).