UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Vi 15/07/11

(1)
$a)$ Use series para resolver el PVI : $y' = x^2\, y$, $y(0) = \sqrt[3]{2}$
Solución:
La ecuación diferencial a resolver es:

$$y' - x^2\, y = 0$$

Por otro lado, tenemos que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.
Luego $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$
Ahora

$$-\,x^2\, y(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+2} = -\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n$$

Notemos además que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = a_1 + 2\, a_2\, x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación diferencial se tiene que:

$$y' - x^2\, y = 0 \Rightarrow a_1 + 2\, a_2\, x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 + 2\, a_2\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[(n+1)\, a_{n+1} \,-\, a_{n-2}\Big] x^n = 0$$

Igualando los coeficientes correspondientes:

$a_1 = 0,\ a_2 = 0$ y $(n+1)\, a_{n+1} \,-\, a_{n-2} = 0$ para $n = 2, 3, ...$

Así
$a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}\ ,\ n = 2, 3, 4, ...$

Es decir,

$a_3 = \frac{a_0}{3}\ ,\ a_4 = \frac{a_1}{4} = 0\ ,\ a_5 = \frac{a_2}{5} = 0\ ,\ a_6 = \frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{3 \cdot 6} = \frac{a_0}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{3^2 \cdot 2!}\ ,\ a_7 = \frac{a_4}{7} = 0,$
$a_8 = \frac{a_5}{8} = 0\ ,\ a_9 = \frac{a_6}{9} = \frac{a_0}{9 \cdot 3^2 \cdot 2!} = \frac{a_0}{3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{a_0}{3^3 \cdot 3!}$

Notamos que :

$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = 0$ y $a_3 = \frac{a_0}{3^1 \cdot 1!}\ ,\ a_6 = \frac{a_0}{3^2 \cdot 2!}\ ,\ a_9 = \frac{a_0}{3^3 \cdot 3!}$

Siguiendo este comportamiento se tiene que:

$a_{3n} = \frac{a_0}{3^n \cdot n!}\ ,\ n = 1, 2, 3, ...$

Así la solución es :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n}\, x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{3^n \cdot n!}\, x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\, \frac{(x^3/3)^n}{n!} =$$

$$a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3/3)^n}{n!} = a_0\ e^{x^3/3}$$

Usando la condición inicial $y(0) = \sqrt[3]{2}$, se tiene que $y(0) = a_0 = \sqrt[3]{2}$ y finalmente se tiene que la solución del PVI $y\,' = x^2\, y$, $y(0) = \sqrt[3]{2}$ es

$$y(x) = \sqrt[3]{2}\ e^{x^3/3}\ \square$$

$b)$ Use la transformada de Laplace para resolver el PVI : $t\, y'\,' - t\, y' - y = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

<u>Solución:</u>

$$t\, y'\,' - t\, y' - y = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t\, y'\,' - t\, y' - y) = \mathcal{L}(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(t\, y'\,') - \mathcal{L}(t\, y') - \mathcal{L}(y) = 0 \Rightarrow\ -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\, y'\,') + \frac{d}{ds}\mathcal{L}(\, y'\,) - \mathcal{L}(y) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2\,\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)\right]+\frac{d}{ds}\left[s\,\mathcal{L}(y)-y(0)\right]-\mathcal{L}(y)=0\Rightarrow$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2\,\mathcal{L}(y)-3\right]+\frac{d}{ds}\left[s\,\mathcal{L}(y)\right]-\mathcal{L}(y)=0\Rightarrow$$

$$-2s\,\mathcal{L}(y)-s^2\,\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(y)+s\,\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)-\mathcal{L}(y)=0\Rightarrow$$

$$(s^2-s)\,\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)+2s\,\mathcal{L}(y)=0\Rightarrow\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y)+\frac{2}{s-1}\,\mathcal{L}(y)=0\Rightarrow$$

$$\frac{d\mathcal{L}(y)}{ds}=-\frac{2}{s-1}\mathcal{L}(y)\Rightarrow\frac{d\mathcal{L}(y)}{\mathcal{L}(y)}=-\frac{2}{s-1}ds$$

La ecuación diferencial anterior es de variables separables e integrando se obtiene, al considerar la constante de integración igual a $ln(c)$:

$$ln(\mathcal{L}(y))=-2\,ln|\,s-1\,|+ln(c)$$

De lo anterior se tiene que:

$$\mathcal{L}(y)=\frac{c}{(s-1)^2}=c\,\frac{1}{(s-1)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$y(t)=c\,t\,e^t$$

Para calcular la constante c debemos usar la derivada, pues $y(0)=0$ y esto no aporta información adicional necesaria para obtener el valor de c.

$$y'(t)=c\,e^t+c\,t\,e^t$$

Usando la condición inicial $y'(0)=3$ se tiene $y(0)=c=3$

Finalmente la solución del PVI $t\,y''-t\,y'-y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3$
es $y(t)=3\,t\,e^t$ ❑

$c)$ Resuelva la ecuación $x(t)=t^2+\int_0^t sen(t-u)\,x(u)\,du$

Solución:

$$x(t)=t^2+\int_0^t sen(t-u)\,x(u)\,du\Rightarrow\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(t^2+\int_0^t sen(t-u)\,x(u)\,du)\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(t^2)+\mathcal{L}(\int_0^t sen(t-u)\,x(u)\,du)\Rightarrow\mathcal{L}(x)=\frac{2}{s^3}+\mathcal{L}(sen(t))\,\mathcal{L}(x)\Rightarrow$$

$\mathcal{L}(x) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1}\,\mathcal{L}(x) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)\mathcal{L}(x) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}\,\mathcal{L}(x) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow$

$\mathcal{L}(x) = \frac{2}{s^3}\Big/\frac{s^2}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{2s^2+2}{s^5} \Rightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$

Aplicando transformada inversa de Laplace se tiene que:

$x(t) = t^2 + \frac{2\,t^4}{4!} = t^2 + \frac{t^4}{12}$

Finalmente la solución de la ecuación integral $x(t) = t^2 + \int_0^t sen(t-u)\,x(u)\,du$ es $x(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}$ ❑

$d)$ Escriba un ejemplo de ecuación diferencial parcial hiperbólica y muestre una solución de ésta.

Solución:

Una ecuación diferencial parcial de la forma

$A\,u_{xx} + B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D\,u_x + E\,u_y + F = 0$

es hiperbólica si $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$

Un ejemplo es la ecuación de la onda $u_{tt} = a^2\,u_{xx}$, pues $A = 1,\ B = 0,\ C = \,-\,a^2$ y $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\,a^2 \end{vmatrix} = \,-\,a^2 < 0,$ porque $a \neq 0$

Una solución de la ecuación de la onda es $u(t,x) = f(x+at) + g(x-at)$ donde f y g son funciones con a lo menos segunda derivada. ❑

(40 puntos).

(2) Resuelva el sistema

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(20 puntos).

Solución:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x \Rightarrow$$

$$y_1' = y_1 + 4y_2 + e^x$$

$$y_2' = y_1 + y_2 + e^x$$

Sean $F(s) = \mathcal{L}(y_1)$ y $G(s) = \mathcal{L}(y_2)$

Aplicando transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\mathcal{L}(y_1') = \mathcal{L}(y_1 + 4y_2 + e^x) \Rightarrow s\,\mathcal{L}(y_1) - y_1(0) = \mathcal{L}(y_1) + 4\,\mathcal{L}(y_2) + \mathcal{L}(e^x)$$
$$\mathcal{L}(y_2') = \mathcal{L}(y_1 + y_2 + e^x) \Rightarrow s\,\mathcal{L}(y_2) - y_2(0) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) + \mathcal{L}(e^x)$$

Luego

$$s\,F(s) = F(s) + 4\,G(s) + \frac{1}{s-1}$$

$$s\,G(s) = F(s) + G(s) + \frac{1}{s-1}$$

para $s > 1$

Así

$$(s-1)\,F(s) - 4\,G(s) = \frac{1}{s-1}$$
$$-\,F(s) + (s-1)\,G(s) = \frac{1}{s-1}$$

Escribamos el sistema anterior en forma matricial

$$\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ G(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 - 4 = s^2 - 2s + 1 - 4 = s^2 - 2s - 3, \text{ con } s \neq 3,\ s \neq -1$$

Aplicando Cramer al sistema anterior:

$$F(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1} & -4 \\ \frac{1}{s-1} & s-1 \end{vmatrix}}{s^2-2s-3} = \frac{1+\frac{4}{s-1}}{(s-3)(s+1)} = \frac{s+3}{(s-3)(s+1)(s-1)}$$

$$G(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{1}{s-1} \\ -1 & \frac{1}{s-1} \end{vmatrix}}{s^2-2s-3} = \frac{1+\frac{1}{s-1}}{(s-3)(s+1)} = \frac{s}{(s-3)(s+1)(s-1)}$$

Usando fracciones parciales

$$\frac{s+3}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} \Rightarrow$$

$$\frac{s+3}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{A(s+1)(s-1)+B(s-3)(s-1)+C(s-3)(s+1)}{(s-3)(s+1)(s-1)} \Rightarrow$$

$$s+3 = A(s+1)(s-1) + B(s-3)(s-1) + C(s-3)(s+1)$$

$$s = -1:\ 2 = 8B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$s = 1:\ 4 = -4C \Rightarrow C = -1$$

$$s = 3:\ 6 = 8A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto

$$\frac{s+3}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

De forma similar para $\frac{s}{(s-3)(s+1)(s-1)}$

$$\frac{s}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} \Rightarrow$$

$$\frac{s}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{A(s+1)(s-1)+B(s-3)(s-1)+C(s-3)(s+1)}{(s-3)(s+1)(s-1)} \Rightarrow$$

$$s = A(s+1)(s-1) + B(s-3)(s-1) + C(s-3)(s+1)$$

$$s = -1:\ -1 = 8B \Rightarrow B = -\frac{1}{8}$$

$$s = 1 : 1 = -4C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$s = 3:\ 3 = 8A \Rightarrow A = \frac{3}{8}$$

Por lo tanto

$$\frac{s}{(s-3)(s+1)(s-1)} = \frac{3}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a los resultados anteriores se tiene que:

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right) \Rightarrow y_1(x) = \frac{3}{4}\,e^{3x} + \frac{1}{4}\,e^{-x} - e^{x}$$

$$y_2(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\right) \Rightarrow y_2(x) = \frac{3}{8}\,e^{3x} - \frac{1}{8}\,e^{-x} - \frac{1}{4}e^{x}$$

Finalmente la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es

$$y_1(x) = \frac{3}{4}\,e^{3x} + \frac{1}{4}\,e^{-x} - e^{x}$$

$$y_2(x) = \frac{3}{8}\,e^{3x} - \frac{1}{8}\,e^{-x} - \frac{1}{4}e^{x} \quad \square$$