

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA N° 1 ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA -
INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 20/04/09**

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.** Si corresponde, dé un contraejemplo.

a) F Si la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 35 y la suma de los primeros 20 términos es 135, entonces la suma de los primeros cinco términos es 10.

Justificación:

Recordemos que la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

Luego:

$$S_{10} = 35 \Rightarrow 10a + \frac{10(9)}{2} d = 35 \Rightarrow 10a + 45d = 35 \quad (*)$$

$$S_{20} = 135 \Rightarrow 20a + \frac{20(19)}{2} d = 135 \Rightarrow 20a + 190d = 135 \quad (**)$$

Multiplcando la ecuación (*) por -2 y sumando el resultado con (**), se obtiene :

$$100d = 65 \Rightarrow d = \frac{13}{20}$$

Reemplazamos el valor recién calculado de d para obtener a de la ecuación (*) :

$$10a = 35 - 45d \Rightarrow 10a = 35 - 45\left(\frac{13}{20}\right) \Rightarrow 10a = 35 - \frac{117}{4} \Rightarrow 10a = \frac{23}{4} \Rightarrow$$

$$a = \frac{23}{40}$$

Ahora

$$S_5 = 5\left(\frac{23}{40}\right) + \frac{5(4)}{2} \left(\frac{13}{20}\right) = \frac{115}{40} + \frac{13}{2} = \frac{75}{8} = 9,375 \neq 10 \quad \square$$

b) F $(1 - \frac{1}{x})^4 = 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3} + 4x^4$

Justificación:

Si $x = 1$, entonces

$$(1 - \frac{1}{x})^4 = (1 - \frac{1}{1})^4 = (1 - 1)^4 = 0$$

y

$$1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3} + 4x^4 = 1 - \frac{4}{1} + \frac{6}{1^2} - \frac{6}{1^3} + 4(1)^4 = 1 - 4 + 6 - 6 + 4 = 1$$

Observamos que los resultados de las expresiones dadas son distintos para un valor de x particular; esto muestra que $(1 - \frac{1}{x})^4 \neq 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3} + 4x^4$ $\square$

c) F Si $\frac{x^2}{y^2} - 1 = 8$ y $x - \frac{1}{y} = 4$, entonces $\frac{x^3 - y}{x + y^3} = 2\sqrt{5}$

Justificación:

$$\frac{x^2}{y^2} - 1 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 9 \Rightarrow x^2 = 9y^2 \Rightarrow x = \pm 3y$$

Consideremos que $x = -3y$ (también es posible desarrollar el ejercicio considerando que $x = 3y$).

$$x - \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow -3y - \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow -3y^2 - 1 = 4y \Rightarrow -3y^2 - 4y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3y^2 + 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow y = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Para $y_1 = -\frac{1}{3}$ se tiene que $x_1 = -3y_1 = 1$

Para $y_2 = -1$ se tiene que $x_2 = -3y_2 = 3$

Considerando los valores $x = 3$ y $y = -1$ se tiene que :

$$\frac{x^3 - y}{x + y^3} = \frac{3^3 - (-1)}{3 + (-1)^3} = \frac{27 + 1}{3 - 1} = \frac{28}{2} \neq 2\sqrt{5}$$

Esto muestra que no todos los valores que satisfacen las ecuaciones $\frac{x^2}{y^2} - 1 = 8$ y $x - \frac{1}{y} = 4$ son tales que $\frac{x^3 - y}{x + y^3} = 2\sqrt{5}$ $\square$

d) V $\sum_{k=50}^{100} k - \sum_{k=10}^{50} k = 2595$

Justificación:

$$\sum_{k=50}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{49} k = \frac{100(101)}{2} - \frac{49(50)}{2} = 5050 - 1225 = 3825$$

$$\sum_{k=10}^{50} k = \sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^9 k = \frac{50(51)}{2} - \frac{9(10)}{2} = 1275 - 45 = 1230$$

$$\therefore \sum_{k=50}^{100} k - \sum_{k=10}^{50} k = 3825 - 1230 = 2595 \quad \square$$

e) V Si $p: \prod_{k=50}^{100} \frac{k+1}{k} = \frac{101}{50}$ y $q: \sum_{i=1}^{100} i^2 = 100^2$, entonces $v((p' \longleftrightarrow q)') = F$

Justificación:

Calculemos la productoria para determinar el valor veritativo de la proposición p .

$$\prod_{k=50}^{100} \frac{k+1}{k} = \frac{51}{50} \frac{52}{51} \frac{53}{52} \frac{54}{53} \dots \frac{100}{99} \frac{101}{100} = \frac{101}{50}$$

Lo anterior muestra que $v(p) = V$

Calculemos ahora la sumatoria para determinar el valor de verdad de q .

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{100(101)(201)}{6} = 338350 \neq 100^2 = 10000$$

Luego $v(q) = F$

Ahora $v(p' \longleftrightarrow q) = V$, porque $F \longleftrightarrow F$ es V .

Finalmente $v((p' \longleftrightarrow q)') = F \quad \square$

f) F Si $A = \{x \in \mathbb{R} / x + 5 = 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$, entonces $A \cup B^c = \emptyset$

Justificación:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x + 5 = 4\} = \{x \in \mathbb{R} / x = 4 - 5\} = \{x \in \mathbb{R} / x = -1\} = \{-1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\} = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \sqrt{4}\} = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm 2\} = \{-2, 2\}$$

$$B^c = U - B = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$A \cup B^c = \{-1\} \cup \mathbb{R} - \{-2, 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \neq \emptyset \quad \square$$

(42 puntos).

(2) a) Te ofrecen un trabajo de 31 días de duración y tienes que elegir entre dos métodos de pago:

Método A : \$ 50.000 por semana

Método B : \$0,01 el primer día, \$0,02 el segundo día, \$0,04 el tercero, \$0,08 el cuarto, y así sucesivamente.

¿Cuál de las dos formas de pago es la mejor, y por qué?

b) Tres números están en progresión geométrica, si se aumenta el segundo en 30, la progresión formada entre ellos se vuelve aritmética y si luego se aumenta el último término en 240, la progresión se vuelve nuevamente geométrica. Obtenga la progresión original.

(18 puntos).

Solución:

a) **Método A :**

Suponemos que 4 semanas es igual a 1 mes, luego después de 1 mes de trabajo ganará

$$4 \times \$ 50.000 = \$ 200.000$$

Método B :

Sabemos que el mes tiene 31 días.

El primer día gana : \$0,01

El segundo día gana : \$0,02

El tercer día gana : \$0,04

El cuarto día gana : \$0,08

Observamos que la progresión es geométrica con $a = 0,01$ y $r = 2$, pues

$$a = 0,01 ; ar = 0,01 \times 2 = 0,02 ; ar^2 = 0,01 \times (2)^2 = 0,01 \times 4 = 0,04 ;$$

$$ar^3 = 0,01 \times (2)^3 = 0,01 \times 8 = 0,08$$

$$\text{Por lo tanto, } S_{31} = a \frac{1-r^{31}}{1-r} = 0,01 \frac{1-2^{31}}{1-2} = 0,01 \frac{-2147483647}{-1} = 21.474.836,47$$

Usando el método B ganarás más de 21 millones de pesos, cantidad muy superior a los 200.000 del método A. $\square$

b) Tres números están en progresión geométrica : a, ar, ar^2

Si se aumenta el segundo en 30 la progresión se vuelve aritmética :

$$a, ar + 30, ar^2 \quad (1)$$

Si se aumenta el último en 240 la progresión ahora es geométrica nuevamente :

$$a, ar + 30, ar^2 + 240 \quad (2)$$

De (1) se tiene que :

$$ar + 30 - a = ar^2 - (ar + 30) \quad (*)$$

De (2) se tiene que :

$$\frac{ar+30}{a} = \frac{ar^2+240}{ar+30} \quad (**)$$

Despejemos a de (*) :

$$ar - a - ar^2 + ar = -60 \Rightarrow ar^2 - 2ar + a = 60 \Rightarrow a(r^2 - 2r + 1) = 60 \Rightarrow$$

$$a = \frac{60}{r^2 - 2r + 1} \quad (3)$$

Despejemos a de (**) :

$$(ar + 30)^2 = a(ar^2 + 240) \Rightarrow a^2 r^2 + 60ar + 900 = a^2 r^2 + 240a \Rightarrow$$

$$240a - 60ar = 900 \Rightarrow a(240 - 60r) = 900 \Rightarrow a = \frac{900}{240 - 60r} \Rightarrow$$

$$a = \frac{15}{4-r} \quad (4)$$

Igualando las expresiones (3) y (4) :

$$\frac{60}{r^2 - 2r + 1} = \frac{15}{4-r} \Rightarrow 60(4-r) = 15(r^2 - 2r + 1) \Rightarrow$$

$$240 - 60r = 15r^2 - 30r + 15 \Rightarrow 15r^2 + 30r - 225 = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ r_2 = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Reemplazando los valores de r recién calculados en (4) :

$$a_1 = \frac{15}{4-r_1} = \frac{15}{4-3} = 15$$

$$a_2 = \frac{15}{4-r_2} = \frac{15}{4-(-5)} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Finalmente las progresiones que satisfacen las condiciones dadas son :

$$a) a_1, a_1 r_1, a_1 r_1^2$$

$$15, 15(3), 15(3)^2$$

$$15, 45, 135$$

$$b) a_2, a_2 r_2, a_2 r_2^2$$

$$\frac{5}{3}, \frac{5}{3}(-5), \frac{5}{3}(-5)^2$$

$$\frac{5}{3}, -\frac{25}{3}, \frac{125}{3} \quad \square$$