

**PAUTA PRUEBA N° 1 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS **FECHA : Ma 18/10/11**

(1)

a) Resuelva la EDO : $2y' + y = 0$

b) Obtenga la solución del PVI : $\frac{dT}{dx} = e^x - x^2$, $T(2) = 1$

c) Muestre que $y(t) = 5tg(5t)$ es solución de $y' = 25 + y^2$

d) Escriba un ejemplo de ecuación diferencial de primer orden cuya solución sea $y(t) = 3e^t$

(28 puntos).

Solución:

a)

$$2y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int dx \Rightarrow$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{2}x + c \Rightarrow y(x) = k e^{-\frac{1}{2}x}, \text{ con } k = e^c > 0$$

La familia de soluciones buscadas es $y(x) = k e^{-\frac{1}{2}x}$ ☐

b)

El PVI a resolver es:

$$\frac{dT}{dx} = e^x - x^2, T(2) = 1$$

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dx} = e^x - x^2 \Rightarrow dT = (e^x - x^2) dx \Rightarrow \int dT = \int (e^x - x^2) dx \Rightarrow$$

$$T(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + c$$

Usando la condición inicial se tiene que:

$$T(2) = e^2 - \frac{8}{3} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{11}{3} - e^2$$

Finalmente la solución del PVI

$$\frac{dT}{dx} = e^x - x^2, T(2) = 1$$

es $T(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3} - e^2$ $\square$

c)

Mostremos que $y(x) = 5 \operatorname{tg}(5x)$ es solución de $y' = 25 + y^2$

$$y' = 25 \sec^2(5x) = 25 (1 + \operatorname{tg}^2(5x)) = 25 + 25 \operatorname{tg}^2(5x) = 25 + y^2$$

Lo anterior muestra que $y(x) = 5 \operatorname{tg}(5x)$ es solución de $y' = 25 + y^2$ $\square$

d) El PVI $y' - y = 0$, $y(0) = 3$ tiene como solución a $y(t) = 3e^t$ $\square$

(2) Una resistencia de 5Ω se conecta en serie con dos condensadores, uno de $0.1 F$ y el otro de $0.01 F$, y un generador con una fem de $100V$. La carga inicial en el condensador es de 5 coulombs.

Encuentre la carga y la corriente como una función del tiempo.

(12 puntos).

Solución:

En un circuito RC se tiene que:

$$Ri + \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = E \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q = E \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}{R} q = \frac{E}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{\left(\frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.01} \right)}{5} q = \frac{100}{5} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{110}{5} q = \frac{100}{5} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + 22 q = 20$$

La ecuación anterior es lineal, luego

$$q(t) = e^{-\int 22 dt} \left[\int 20 e^{\int 22 dt} dt + c \right] = e^{-22t} \left[20 \int e^{22t} dt + c \right] =$$

$$e^{-22t} \left[\frac{20}{22} e^{22t} + c \right] = \frac{10}{11} + c e^{-22t}$$

Sabemos además que la carga inicial en el condensador es de 5 coulombs, es decir, $q(0) = 5$. Así

$$q(0) = \frac{10}{11} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{45}{11}$$

Por lo tanto, la carga en función del tiempo es $q(t) = \frac{10}{11} + \frac{45}{11} e^{-22t}$

Por otro lado, recordemos que la corriente $i(t) = \frac{dq}{dt}$. Luego

$$i(t) = -90 e^{-22t}$$

Finalmente, la corriente en función del tiempo es $i(t) = -90 e^{-22t}$ $\square$

(3) Resuelva:

a) Suponga que en el instante inicial 10 mil personas en una ciudad con una población de 100 mil habitantes han oído un cierto rumor. Después de una semana el número se ha incrementado a 20 mil personas. Si la tasa a la que se incrementa el rumor es proporcional al producto del número de habitantes que conocen el rumor y de los que no lo conocen, entonces ¿cuándo el 90% de la población sabrá el rumor?

b) $(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$

(20 puntos).

Solución:

a)

Sea $P(t)$ el número de habitantes que conocen el rumor en el instante t , donde t se mide en semanas.

Se nos dice que la tasa a la que se incrementa el rumor $\frac{dP}{dt}$ es proporcional al producto del número de habitantes que conocen el rumor $P(t)$ y de los que no lo conocen $(100000 - P(t))$, esto es

$$\frac{dP}{dt} = k P (100000 - P) \Rightarrow \frac{dP}{P(100000-P)} = k dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P(100000-P)} = \int k dt$$

Usando fracciones parciales.

$$\frac{1}{P(100000-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{100000-P} \Rightarrow 1 = A(100000 - P) + B P$$

$$P = 0 : 1 = 100000 A \Rightarrow A = \frac{1}{100000}$$

$$P = 100000 : 1 = 100000 B \Rightarrow B = \frac{1}{100000}$$

Luego

$$\frac{1}{P(100000-P)} = \frac{1}{100000} \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{100000-P} \right]$$

Así

$$\int \frac{dP}{P(100000-P)} = \frac{1}{100000} \int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{100000-P} \right] dP =$$

$$\frac{1}{100000} [\ln(P) - \ln(100000 - P)] = \frac{1}{100000} \ln\left(\frac{P}{100000-P}\right)$$

Volviendo a la ecuación diferencial, se tiene que:

$$\int \frac{dP}{P(100000-P)} = \int k dt \Rightarrow \frac{1}{100000} \ln\left(\frac{P}{100000-P}\right) = kt + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{P}{100000-P}\right) = 100000 kt + c_2 \Rightarrow \frac{P}{100000-P} = e^{100000 kt + c_2} \Rightarrow$$

$$\frac{P}{100000-P} = c e^{100000 kt} \Rightarrow P = 100000 c e^{100000 kt} - c e^{100000 kt} P \Rightarrow$$

$$P(t) = \frac{100000 c e^{100000 kt}}{1 + c e^{100000 kt}}$$

Ahora, el enunciado señala que en el instante inicial 10 mil personas han oído un cierto rumor ,es decir, $P(0) = 10000$. Además se indica que después de una semana el número de personas que han oído el rumor se ha incrementado a 20 mil, es decir, $P(1) = 20000$. Luego

$$P(0) = 10000 \Rightarrow \frac{P(0)}{100000-P(0)} = c e^{100000 k \cdot 0} \Rightarrow c = \frac{10000}{100000-10000} \Rightarrow$$

$$c = \frac{10000}{90000} \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

$$P(1) = 20000 \Rightarrow \frac{P(1)}{100000-P(1)} = \frac{1}{9} e^{100000 k} \Rightarrow \frac{20000}{100000-20000} = \frac{1}{9} e^{100000 k} \Rightarrow$$

$$\frac{20000}{80000} = \frac{1}{9} e^{100000 k} \Rightarrow \frac{9}{4} = e^{100000 k} \Rightarrow 100000 k = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0.81093$$

De lo anterior se tiene que:

$$P(t) = \frac{100000 \frac{1}{9} e^{0.81093 t}}{1 + \frac{1}{9} e^{0.81093 t}}$$

La pregunta es ¿cuándo el 90% de la población sabrá el rumor?, es decir, debemos obtener el valor de t tal que $P(t) = \frac{90}{100} \cdot 100000 = 90000$

$$\frac{P(t)}{100000 - P(t)} = \frac{1}{9} e^{100000 k t} \Rightarrow \frac{90000}{100000 - 90000} = \frac{1}{9} e^{100000 k t} \Rightarrow \frac{90000}{10000} = \frac{1}{9} e^{100000 k t} \Rightarrow$$

$$e^{0.81093 t} = 81 \Rightarrow 0.81093 t = \ln(81) \Rightarrow t \approx 5.42 \text{ semanas}$$

Finalmente podemos decir que después de aproximadamente 5.42 semanas el 90% de la población ha escuchado el rumor. $\square$

b) Resolvamos la ecuación diferencial $(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$

$$(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0 \Rightarrow (2x + xy^2) dx = - (4y + x^2y) dy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(2x + xy^2)}{(4y + x^2y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{x(2 + y^2)}{y(4 + x^2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{x}{(4 + x^2)} \frac{(2 + y^2)}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{(2 + y^2)} dy = - \frac{x}{(4 + x^2)} dx \Rightarrow \int \frac{y}{(2 + y^2)} dy = - \int \frac{x}{(4 + x^2)} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(2 + y^2) = - \frac{1}{2} \ln(4 + x^2) + \ln(c) \Rightarrow \ln(2 + y^2) = \ln(c(4 + x^2)^{-1}) \Rightarrow$$

$$2 + y^2 = \frac{c}{4 + x^2}, \text{ con } c \text{ una constante real positiva.}$$

Finalmente la familia de soluciones de la ecuación diferencial

$$(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$$

está dada por:

$$2 + y^2 = \frac{c}{4 + x^2}, \text{ con } c \text{ una constante real positiva. } \square$$