

PAUTA PRUEBA N° 1 PARTE 1 (1/3)
ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Vi 10/06/11**

(1)

a) Resuelva la EDO : $y' + y = 0$

b) Obtenga la solución del PVI : $\frac{dT}{dx} = e^x + x$, $T(2) = 1$

c) Muestre que $y(x) = 5 \operatorname{tg}(5x)$ es solución de $y' = 25 + y^2$

d) Escriba un ejemplo de ecuación diferencial de primer orden cuya solución sea $y(t) = e^t$

(28 puntos).

Solución:

a)

$$y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow -\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow -\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow -\ln(y) = x + c \Rightarrow$$

$$\ln(y) = -x - c \Rightarrow y(x) = k e^{-x}, \text{ con } k = e^{-c} > 0$$

La familia de soluciones buscadas es $y(x) = k e^{-x}$ ☐

b)

El PVI a resolver es:

$$\frac{dT}{dx} = e^x + x, T(2) = 1$$

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dx} = e^x + x \Rightarrow dT = (e^x + x) dx \Rightarrow \int dT = \int (e^x + x) dx \Rightarrow T(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

Usando la condición inicial se tiene que:

$$T(2) = e^2 + 2 + c = 1 \Rightarrow c = -e^2 - 1$$

Finalmente la solución del PVI

$$\frac{dT}{dx} = e^x + x, T(2) = 1$$

es $T(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - e^2 - 1$ $\square$

c)

Mostremos que $y(x) = 5 \operatorname{tg}(5x)$ es solución de $y' = 25 + y^2$

$$y' = 25 \sec^2(5x) = 25 (1 + \operatorname{tg}^2(5x)) = 25 + 25 \operatorname{tg}^2(5x) = 25 + y^2$$

Lo anterior muestra que $y(x) = 5 \operatorname{tg}(5x)$ es solución de $y' = 25 + y^2$ $\square$

d) El PVI $y' - y = 0$, $y(0) = 1$ tiene como solución a $y(t) = e^t$ $\square$

(2) Una resistencia de $R \Omega$ varía con el tiempo t (en segundos) de acuerdo a $R = 1 + 0.01 t$. Se conecta en serie con un condensador de $0.1 F$ y un generador con una fem de $100V$. La carga inicial en el condensador es de 5 coulombs. Encuentre:

i) La carga y la corriente como una función del tiempo.

ii) La carga máxima teórica.

(12 puntos).

Solución:

i) En un circuito RC se tiene que:

$$R i + \frac{q}{C} = E \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.1(1+0.01 t)} = \frac{100}{1+0.01 t}$$

$$q(t) = e^{-10 \int \frac{1}{1+0.01 t} dt} \left[\int \frac{100}{1+0.01 t} e^{10 \int \frac{1}{1+0.01 t} dt} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$q(t) = e^{-1000 \ln(1+0.01 t)} \left[\int \frac{100}{1+0.01 t} e^{1000 \ln(1+0.01 t)} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$q(t) = (1 + 0.01 t)^{-1000} \left[\int \frac{100}{1+0.01 t} (1 + 0.01 t)^{1000} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$q(t) = (1 + 0.01 t)^{-1000} \left[10 (1 + 0.01 t)^{1000} + c \right] \Rightarrow q(t) = 10 + \frac{c}{(1+0.01 t)^{1000}}$$

De acuerdo al enunciado se tiene que la carga inicial en el condensador es de 5 coulombs, es decir, $q(0) = 5$

$$q(0) = 10 + c = 5 \Rightarrow c = -5$$

Por lo tanto, la carga como función del tiempo es:

$$q(t) = 10 - \frac{5}{(1+0.01t)^{1000}}$$

$$\text{Ahora: } i(t) = q'(t) = \frac{50}{(1+0.01t)^{1001}}$$

Concluimos que la corriente como función del tiempo es:

$$i(t) = \frac{50}{(1+0.01t)^{1001}} \quad \square$$

ii) Observamos que $q'(t) > 0$ para todo $t > 0$, esto muestra que q es una función creciente. Luego la carga máxima teórica está dada por:

$$q_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 10 \text{ coulombs. } \square$$

(3) Resuelva:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y} \text{ haciendo el cambio de variable } z = \frac{y}{x^n} \text{ para un } n \text{ adecuado}$$

$$b) (2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$$

(20 puntos).

Solución:

a)

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}$$

Consideremos el cambio de variable $z = \frac{y}{x^n}$

Tenemos que $y = z x^n$, de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} x^n + n z x^{n-1}$

Luego dado que $\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}$ se tiene que:

$$\frac{dz}{dx} x^n + n z x^{n-1} = \frac{z x^n - x z^2 x^{2n}}{x + z x^{n+2}} \Rightarrow x^n \frac{dz}{dx} = \frac{z x^n - z^2 x^{2n+1}}{x + z x^{n+2}} - n z x^{n-1} \Rightarrow$$

$$x^n \frac{dz}{dx} = \frac{z x^n - z^2 x^{2n+1} - n z x^n - n z^2 x^{2n+1}}{x + z x^{n+2}} \Rightarrow x^n \frac{dz}{dx} = \frac{x^n (z - z^2 x^{n+1} - n z - n z^2 x^{n+1})}{x + z x^{n+2}} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - z^2 x^{n+1} - n z - n z^2 x^{n+1}}{x(1 + z x^{n+1})}$$

Ahora si hacemos $n = -1$, se tiene que $z = xy$, y además se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - z^2 + z + z^2}{x(1+z)} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x(1+z)}$$

Resolvamos la ecuación diferencial obtenida.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x(1+z)} \Rightarrow \frac{1+z}{z} dz = \frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow$$

$z + \ln(z) = 2 \ln(x) + c \Rightarrow^{z=xy} xy + \ln(xy) = 2 \ln(x) + c$, con c una constante real.

Finalmente podemos decir que la familia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}$ está dada en forma implícita por

$$xy + \ln(xy) = 2 \ln(x) + c, \text{ con } c \text{ una constante real. } \square$$

b) Resolvamos la ecuación diferencial $(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$

$$(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0 \Rightarrow (2x + xy^2) dx = - (4y + x^2y) dy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(2x+xy^2)}{(4y+x^2y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{x(2+y^2)}{y(4+x^2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{x}{(4+x^2)} \frac{(2+y^2)}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{(2+y^2)} dy = - \frac{x}{(4+x^2)} dx \Rightarrow \int \frac{y}{(2+y^2)} dy = - \int \frac{x}{(4+x^2)} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(2 + y^2) = - \frac{1}{2} \ln(4 + x^2) + \ln(c) \Rightarrow \ln(2 + y^2) = \ln(c(4 + x^2)^{-1}) \Rightarrow$$

$$2 + y^2 = \frac{c}{4+x^2}, \text{ con } c \text{ una constante real positiva.}$$

Finalmente la familia de soluciones de la ecuación diferencial

$$(2x + xy^2) dx + (4y + x^2y) dy = 0$$

está dada por:

$$2 + y^2 = \frac{c}{4+x^2}, \text{ con } c \text{ una constante real positiva. } \square$$