

PAUTA TAREA N° 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

FECHA ENTREGA: Mi 19/08/09

Resuelva la integral:

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx, \quad a > 0$$

(60 puntos).

Solución:

$$\left| x - \frac{a}{2} \right| = \begin{cases} x - \frac{a}{2} & , \text{ si } x \geq \frac{a}{2} \\ -\left(x - \frac{a}{2}\right) & , \text{ si } x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Luego notamos que se debe considerar dos casos:

$$\text{Caso 1 : } x \geq \frac{a}{2}$$

$$\text{Caso 2 : } x < \frac{a}{2}$$

Para el Caso 1 se tiene que :

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx = \int e^{a+x} \left(x - \frac{a}{2} \right) dx = \int x e^{a+x} dx - \frac{a}{2} \int e^{a+x} dx \quad (*)$$

Ahora se hace necesario calcular $\int x e^{a+x} dx$ mediante integración por partes.

$$p' = e^{a+x} \Rightarrow p = e^{a+x}$$

$$q = x \Rightarrow q' = 1$$

$$\int x e^{a+x} dx = x e^{a+x} - \int e^{a+x} dx = x e^{a+x} - e^{a+x} \quad (**)$$

Reemplazando (**) en (*) se tiene que :

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx = \int x e^{a+x} dx - \frac{a}{2} \int e^{a+x} dx = x e^{a+x} - e^{a+x} - \frac{a}{2} e^{a+x} = e^{a+x} \left(x - 1 - \frac{a}{2} \right)$$

Por lo tanto, si $x \geq \frac{a}{2}$ se tiene que :

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx = e^{a+x} \left(x - 1 - \frac{a}{2} \right)$$

Para el *Caso 2* debemos observar que el resultado es el mismo multiplicado por -1 , pues $Caso\ 2 = -Caso\ 1$. $\left[Caso\ 2 = - \left(x - \frac{a}{2} \right) \right]$

Luego si $x < \frac{a}{2}$, entonces

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx = - e^{a+x} \left(x - 1 - \frac{a}{2} \right) = e^{a+x} \left(1 - x + \frac{a}{2} \right)$$

Finalmente podemos decir que :

$$\int e^{a+x} \left| x - \frac{a}{2} \right| dx = \begin{cases} e^{a+x} \left(x - 1 - \frac{a}{2} \right) & , \text{ si } x \geq \frac{a}{2} \\ e^{a+x} \left(1 - x + \frac{a}{2} \right) & , \text{ si } x < \frac{a}{2} \end{cases} \quad \square$$