UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 4 CÁLCULO INTEGRAL + EDO (60%)
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS FECHA : Mi 21/10/09

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**.

$a)$ __F__ $\int_1^{\pi} \frac{1}{1-cos(x)}\,dx > 100$

Justificación:
Considerando la sustitución $t = tg(\frac{x}{2})$, se tiene que :

$sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

Reemplazando en $\frac{1}{1-cos(x)}\,dx$ se tiene que :

$$\frac{1}{1-cos(x)}\,dx = \frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1+t^2}{2\,t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{1-cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{tg(\frac{x}{2})}$$

$$\therefore \int_1^{\pi} \frac{1}{1-cos(x)}\,dx = -\left.\frac{1}{tg(\frac{x}{2})}\right|_1^{\pi} = -\frac{1}{tg(\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{tg(\frac{1}{2})} = \frac{1}{tg(\frac{1}{2})} \approx$$

$1.83 < 100$ ❑

$b)$ _____ Dos funciones f y g se dicen ortogonales en un intervalo $[a,b]$ si :

$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0.$
Las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2^x$ son ortogonales en el intervalo $[\,0, 1\,]$.
Justificación:
Calculemos $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 (x^2 - 1)\, 2^x\, dx = \int_0^1 x^2\, 2^x\, dx - \int_0^1 2^x\, dx$
Recordemos que : $(2^x)\,' = ln(2)\, 2^x$
Lo anterior significa que : $\int_0^1 2^x\, dx = \frac{1}{ln(2)}\, 2^x \Big|_0^1 = \frac{1}{ln(2)}[2-1] = \frac{1}{ln(2)}$
Calculemos $\int_0^1 x^2\, 2^x\, dx$ usando integración por partes.

$p\,' = 2^x \;\Rightarrow p = \frac{1}{ln(2)}\, 2^x$

$q = x^2 \Rightarrow q\,' = 2x$

$$\int x^2\, 2^x\, dx \;= \frac{1}{ln(2)} x^2\, 2^x - \frac{2}{ln(2)} \int x\, 2^x\, dx \qquad\qquad (*)$$

Ahora para calcular $\int x\, 2^x\, dx$ usamos nuevamente integración por partes.

$p\,' = 2^x \;\Rightarrow p = \frac{1}{ln(2)}\, 2^x$

$q = x \Rightarrow q\,' = 1$

$$\int x\, 2^x\, dx \;= \frac{1}{ln(2)}\, x\, 2^x - \frac{1}{ln(2)} \int 2^x\, dx = \frac{1}{ln(2)}\, x\, 2^x - \frac{1}{ln(2)}\, \frac{1}{ln(2)}\, 2^x$$

Reemplazando el resultado anterior en $(*)$ obtenemos :

$$\int x^2\, 2^x\, dx \;= \frac{1}{ln(2)} x^2\, 2^x - \frac{2}{ln(2)} \left[\frac{1}{ln(2)}\, x\, 2^x - \frac{1}{ln(2)}\, \frac{1}{ln(2)}\, 2^x\right] =$$

$$\frac{1}{ln(2)} x^2\, 2^x - \frac{2}{[\,ln(2)\,]^2}\; x\, 2^x + \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3}\, 2^x$$

Luego :

$$\int_0^1 x^2\, 2^x\, dx \;= \left[\frac{1}{ln(2)} x^2\, 2^x - \frac{2}{[\,ln(2)\,]^2}\; x\, 2^x + \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3}\, 2^x\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{ln(2)} - \frac{4}{[\,ln(2)\,]^2} \;+ \frac{4}{[\,ln(2)\,]^3} - \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3} = \frac{2}{ln(2)} - \frac{4}{[\,ln(2)\,]^2} \;+ \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3}$$

Finalmente :

$$\int_0^1 (x^2-1)\,2^x\,dx = \int_0^1 x^2\,2^x\,dx - \int_0^1 2^x\,dx =$$

$$\frac{2}{ln(2)} - \frac{4}{[\,ln(2)\,]^2} + \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3} - \frac{1}{ln(2)} = \frac{1}{ln(2)} - \frac{4}{[\,ln(2)\,]^2} + \frac{2}{[\,ln(2)\,]^3} \approx$$

$$1.44 - 8.33 + 6.01 = -0.88 \neq 0 \;\square$$

(30 puntos).

(2) Resuelva las integrales:

$a)\ \int_4^5 \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx$

$b)\ \int \frac{1}{\sqrt{9t^2+6t-8}}\,dt$

(30 puntos).

<u>**Solución:**</u>

$a)$

$$\int_4^5 \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx = \lim_{t\to 5^-} \int_4^t \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx$$

Calculemos $\int_4^t \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx$

$$\int_4^t \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx = \int_4^t (5-x)^{-2/5}\,dx = -\frac{5}{3}\,(5-x)^{3/2}\Big|_4^t = -\frac{5}{3}\,(5-t)^{3/2} + \frac{5}{3}$$

Por lo tanto :

$$\int_4^5 \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx = \lim_{t\to 5^-} \int_4^t \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx = \lim_{t\to 5^-} \left[-\frac{5}{3}\,(5-t)^{3/2} + \frac{5}{3} \right] = \frac{5}{3}$$

Finalmente : $\int_4^5 \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx = \frac{5}{3} \;\square$

$b)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9t^2+6t-8}}\ dt$$

Para resolver la integral anterior debemos primero completar cuadrados.

$$9t^2+6t-8 = 9(t^2+\frac{6}{9}t-\frac{8}{9}) = 9(t^2+\frac{2}{3}t-\frac{8}{9}) = 9(t+\frac{1}{3})^2-9 = 9\left[(t+\frac{1}{3})^2-1\right]$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9t^2+6t-8}}\ dt = \int \frac{1}{\sqrt{9\left[(t+\frac{1}{3})^2-1\right]}}\ dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}}\ dt$$

Consideremos la sustitución : $t+\frac{1}{3} = sec(\alpha)$

Luego :

$$dt\ = sec(\alpha)\,tg(\alpha)\,d\alpha$$

$$\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}\ = \sqrt{sec^2(\alpha)-1}\ = tg(\alpha)$$

Reemplazando lo anterior en la integral $\int \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}}\ dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}}\ dt = \int \frac{1}{tg(\alpha)}\ sec(\alpha)\,tg(\alpha)\,d\alpha =$$

$$\int sec(\alpha)\ d\alpha = ln|sec(\alpha)+tg(\alpha)|$$

Ahora recordemos que : $tg(\alpha) = \sqrt{sec^2(\alpha)-1}\ = \sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}$

Por lo tanto : $\int \frac{1}{\sqrt{9t^2+6t-8}}\ dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}}\ dt =$

$$\frac{1}{3}\,ln\left|t+\frac{1}{3}+\sqrt{(t+\frac{1}{3})^2-1}\right|+c\ \square$$