UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 2 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 60 MINUTOS FECHA : Mi 02/09/09

(1) Resuelva las integrales:

$a) \int x^5 \sqrt{1+x^2} \; dx$

$b) \int e^{2t} \; sen(3t)\, dt$

(40 puntos).

<u>Solución:</u>

$a) \int x^5 \sqrt{1+x^2} \; dx$

Para resolver esta integral es útil considerar que :

$$x^5 \sqrt{1+x^2} \; = (x^2)^2 \cdot \; x \; \cdot \sqrt{1+x^2}$$

Luego si hacemos $M = 1 + x^2$, se tiene que :

$$dM = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dM$$

y además

$$M = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = M - 1$$

Usando la sustitución anterior :

$$\int x^5 \sqrt{1+x^2} \; dx = \int (x^2)^2 \cdot \; \sqrt{1+x^2} \; \cdot x \; dx =$$

$\frac{1}{2}\int (M-1)^2 \cdot \sqrt{M} \cdot dM = \frac{1}{2}\int (M^2-2M+1)\cdot M^{1/2} \cdot dM =$

$\frac{1}{2}\int (M^{5/2}-2M^{3/2}+M^{1/2})\, dM =$

$\frac{1}{2}\int M^{5/2}\, dM - \frac{2}{2}\int M^{3/2}\, dM + \frac{1}{2}\int M^{1/2}\, dM =$

$\frac{1}{2}\int M^{5/2}\, dM - \int M^{3/2}\, dM + \frac{1}{2}\int M^{1/2}\, dM =$

$\frac{1}{2}\frac{2}{7}M^{7/2} - \frac{2}{5}M^{5/2} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}M^{3/2} + c = \frac{1}{7}M^{7/2} - \frac{2}{5}M^{5/2} + \frac{1}{3}M^{3/2} + c =$

$\frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$

Finalmente:

$$\int x^5 \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c \ \square$$

$b)$ $\int e^{2t}\ sen(3t)\, dt$

Usando integración por partes.

$p' = sen(3t) \Rightarrow p = -\frac{1}{3}\, cos(3t)$

$q = e^{2t} \Rightarrow q' = 2\, e^{2t}$

$$I = \int e^{2t}\ sen(3t)\, dt = -\frac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \frac{2}{3}\int e^{2t}\ cos(3t)\, dt \qquad (*)$$

Ahora para calcular la integral $\int e^{2t}\ cos(3t)\, dt$ usamos nuevamente integración por partes.

$p' = cos(3t) \Rightarrow p = \frac{1}{3}\, sen(3t)$

$q = e^{2t} \Rightarrow q' = 2\, e^{2t}$

$$\int e^{2t} \; cos(3t)\, dt = \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, sen(3t) - \tfrac{2}{3}\int e^{2t} \; sen(3t)\, dt = \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, sen(3t) - \tfrac{2}{3} I$$

Reemplazando este último resultado en $(*)$ se tiene que :

$$I = \; - \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{3}\int e^{2t} \; cos(3t)\, dt \qquad \Rightarrow$$

$$I = \; - \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, sen(3t) - \tfrac{2}{3} I\right] \quad \Rightarrow$$

$$I = \; - \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{9}\, e^{2t}\, sen(3t) - \tfrac{4}{9} I \qquad \Rightarrow$$

$$(1 + \tfrac{4}{9})\, I = \; - \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{9}\, e^{2t}\, sen(3t) \Rightarrow$$

$$\tfrac{13}{9}\, I = \; - \tfrac{1}{3}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{9}\, e^{2t}\, sen(3t) \Rightarrow$$

$$I = \; - \tfrac{3}{13}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{13}\, e^{2t}\, sen(3t)$$

Finalmente hemos concluido que :

$$\int e^{2t} \; sen(3t)\, dt = \; - \tfrac{3}{13}\, e^{2t}\, cos(3t) + \tfrac{2}{13}\, e^{2t}\, sen(3t) + c \;\; \square$$

(2) Muestre que :

$$\int cos^n(x)\, dx = \tfrac{1}{n}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \tfrac{n-1}{n} \int cos^{n-2}(x)\, dx, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>
Notemos que :

$$cos^n(x) = cos^2(x)\, cos^{n-2}(x) = (1 - sen^2(x))\, cos^{n-2}(x) =$$

$$cos^{n-2}(x) - sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)$$

Sea $I_n = \int cos^n(x)\, dx$. Luego :

$$I_n = \int cos^n(x)\, dx = \int cos^{n-2}(x)\, dx - \int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx =$$

$I_{n-2} - \int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx \Rightarrow$

$$I_n = I_{n-2} - \int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx \qquad (*)$$

Calculemos ahora $\int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx.$
Antes de ocupar el método de integración por partes es necesario notar que :

$sen^2(x)\, cos^{n-2}(x) = sen(x)\, sen(x)\, cos^{n-2}(x)$

Ahora, usemos el método de integración por partes considerando

$p' = sen(x)\, cos^{n-2}(x) \Rightarrow p = -\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\,,\ n \neq 1$ (La obtención de este resultado se muestra abajo)

$q = sen(x) \Rightarrow q' = cos(x)$

$\therefore \int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx = \int sen(x)\, \left[sen(x)\, cos^{n-2}(x)\right] dx =$

$-\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{1}{n-1}\int cos^{n-1}(x)\, cos(x)\, dx =$

$-\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{1}{n-1}\int cos^{n}(x)\, dx =$

$-\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{1}{n-1} I_n$

Hemos obtenido el resultado

$$\int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx = -\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{1}{n-1} I_n \qquad (**)$$

Reemplazando $(**)$ en $(*)$ se tiene que :

$I_n = I_{n-2} - \int sen^2(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx \Rightarrow$

$I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) I_n = I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) \Rightarrow$

$\left(\frac{n}{n-1}\right) I_n = \frac{(n-1)\, I_{n-2} + cos^{n-1}(x)\, sen(x)}{n-1} \Rightarrow$

$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2} + \frac{1}{n}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) \Rightarrow$

$\int\, cos^n(x)\, dx = \frac{1}{n}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{n-1}{n} \int\, cos^{n-2}(x)\, dx$

que es lo que se quería probar.

Para terminar el ejercicio falta considerar dos cosas pendientes, la primera es mostrar que

$p' = sen(x)\, cos^{n-2}(x)\ \Rightarrow p =\, -\frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, ,\, n \neq 1$

En efecto

$p' = sen(x)\, cos^{n-2}(x)\ \Rightarrow p = \int\, sen(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx$

Usemos el método de sustitución simple con $M = cos(x)$.

$M = cos(x) \Rightarrow dM =\, -\, sen(x)\, dx \Rightarrow sen(x)\, dx =\, -\, dM$

$p = \int\, sen(x)\, cos^{n-2}(x)\, dx = \int\, cos^{n-2}(x)\ sen(x)\, dx =\, - \int\, M^{n-2}\, dM =$

$-\, \frac{M^{n-1}}{n-1}\, =\, -\, \frac{1}{n-1}\, cos^{n-1}(x)\, ,\, n \neq 1$

La segunda cosa que debemos mostrar es el resultado para el caso particular $n = 1$.

$\int\, cos^n(x)\, dx =\, \int\, cos(x)\, dx = sen(x)$

Este resultado concuerda con la fórmula obtenida pues para $n = 1$ se tiene que :

$\int\, cos^n(x)\, dx = \frac{1}{n}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{n-1}{n} \int\, cos^{n-2}(x)\, dx \Rightarrow$

$\int\, cos(x)\, dx = \frac{1}{1}\, cos^{1-1}(x)\, sen(x) + \frac{1-1}{1} \int\, cos^{1-2}(x)\, dx \Rightarrow$

$\int\, cos(x)\, dx = sen(x)$

Finalmente podemos decir que :

$\int\, cos^n(x)\, dx = \frac{1}{n}\, cos^{n-1}(x)\, sen(x) + \frac{n-1}{n} \int\, cos^{n-2}(x)\, dx$, con $n \in \mathbb{N}$ ❑