UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1 CÁLCULO INTEGRAL + EDO
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Mi 09/09/09

(1) Resuelva las integrales:

$a) \int_0^{\pi} x\, cos(x)\ \ dx$

$b) \int e^{at}\ sen(2t)\, dt \quad , \quad a > 0$

$c) \int cos(5t)\, sen(2t)\, dt$

$d) \int \frac{tg^3(x)}{cos^3(x)}\, dx$

$e) \int_1^5 |2x-3| \ \cdot \sqrt{x}\ \ dx$

(50 puntos).

<u>Solución:</u>

$a) \int_0^{\pi} x\, cos(x)\ \ dx$

Para calcular esta integral podemos usar integración por partes.

$p' = cos(x) \Rightarrow p = sen(x)$

$q = x \Rightarrow q' = 1$

$$\int x\, cos(x)\ \ dx = x\, sen(x) - \int sen(x)\ dx = x\, sen(x) + cos(x) + c$$

Luego :

$$\int_0^{\pi} x\, cos(x)\ \ dx = \Big[x\, sen(x) + cos(x)\Big]_0^{\pi} =$$

$$\pi\, sen(\pi) + cos(\pi) - 0\, sen(0) - cos(0) = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x\, cos(x)\ \ dx = -2\ \square$$

$b)\ \int e^{at}\ sen(2t)\, dt \quad , \quad a > 0$

Usemos integración por partes.

$$p' = sen(2t) \Rightarrow p = -\tfrac{1}{2}\, cos(2t)$$

$$q = e^{at} \Rightarrow q' = a\, e^{at}$$

$$I = \int e^{at}\ sen(2t)\, dt \ = -\tfrac{1}{2}\, e^{at}\, cos(2t) + \tfrac{1}{2}\, a \int e^{at}\ cos(2t)\, dt$$

Usemos nuevamente integración por partes para calcular la integral $\int e^{at}\ cos(2t)\, dt$

$$p' = cos(2t) \Rightarrow p = \tfrac{1}{2}\, sen(2t)$$

$$q = e^{at} \Rightarrow q' = a\, e^{at}$$

$$\int e^{at}\ cos(2t)\, dt \ = \tfrac{1}{2}\, e^{at}\, sen(2t) - \tfrac{1}{2}\, a \int e^{at}\ sen(2t)\, dt \ =$$

$$\tfrac{1}{2}\, e^{at}\, sen(2t) - \tfrac{1}{2}\, a\, I \ \Rightarrow$$

$$\int e^{at}\ cos(2t)\, dt \ = \tfrac{1}{2}\, e^{at}\, sen(2t) - \tfrac{1}{2}\, a\, I$$

Reemplazando esta expresión en el desarrollo de I anterior, se tiene que :

$$I = -\tfrac{1}{2}\, e^{at}\, cos(2t) + \tfrac{1}{2}\, a \int e^{at}\ cos(2t)\, dt \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2}\, e^{at}\, cos(2t) + \frac{1}{2}\, a\left[\frac{1}{2}\, e^{at}\, sen(2t) - \frac{1}{2}\, a\, I\right] \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2}\, e^{at}\, cos(2t) + \frac{1}{4}\, a\, e^{at}\, sen(2t) - \frac{1}{4}\, a^2\, I \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\, a^2\right) I = -\frac{1}{2}\, e^{at}\, cos(2t) + \frac{1}{4}\, a\, e^{at}\, sen(2t) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4 + a^2}{4}\right) I = -\frac{2}{4}\, e^{at}\, cos(2t) + \frac{1}{4}\, a\, e^{at}\, sen(2t) \Rightarrow$$

$$I = \frac{-2\, e^{at}\, cos(2t) + a\, e^{at}\, sen(2t)}{4 + a^2}$$

$$\therefore \int e^{at}\; sen(2t)\, dt = \frac{-2\, e^{at}\, cos(2t) + a\, e^{at}\, sen(2t)}{4 + a^2} + c \;\square$$

$c)\ \int cos(5t)\, sen(2t)\, dt$

Para resolver esta integral es necesario recordar la identidad trigonométrica :

$$cos(\alpha)\, sen(\beta) = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha + \beta) - sen(\alpha - \beta)\right]$$

Luego con $\alpha = 5t$ y $\beta = 2t$, se tiene que :

$$\int cos(5t)\, sen(2t)\, dt =$$

$$\int \frac{1}{2}\left[sen(5t + 2t) - sen(5t - 2t)\right] dt =$$

$$\frac{1}{2}\int sen(7t)\, dt - \frac{1}{2}\int sen(3t)\, dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{7}cos(7t) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}cos(3t) + c =$$

$$-\frac{1}{14}cos(7t) + \frac{1}{6}cos(3t) + c$$

$$\therefore \int cos(5t)\, sen(2t)\, dt = -\frac{1}{14}cos(7t) + \frac{1}{6}cos(3t) + c \;\square$$

$d) \int \frac{tg^3(x)}{cos^3(x)}\, dx$

Para resolver esta integral notemos que :

$$\frac{tg^3(x)}{cos^3(x)} = tg^3(x)\, \frac{1}{cos^3(x)} = tg^3(x)\ sec^3(x)$$

Luego :

$$\int \frac{tg^3(x)}{cos^3(x)}\, dx = \int tg^3(x)\ sec^3(x)\ dx$$

Para resolver $\int tg^3(x)\ sec^3(x)\ dx$ consideremos la siguiente factorización :

$$tg^3(x)\ sec^3(x) = tg^2(x)\, sec^2(x)\, tg(x)\, sec(x) =$$

$$(sec^2(x) - 1) sec^2(x)\, tg(x)\, sec(x) =$$

$$sec^4(x)\, tg(x)\, sec(x) - sec^2(x)\, tg(x)\, sec(x)$$

Si consideramos ahora la sustitución $M = sec(x)$, se tiene que :

$$dM = tg(x)\, sec(x)\, dx$$

$$\int \frac{tg^3(x)}{cos^3(x)}\, dx = \int tg^3(x)\ sec^3(x)\ dx =$$

$$\int sec^4(x)\, tg(x)\, sec(x)\, dx - \int sec^2(x)\, tg(x)\, sec(x)\, dx =$$

$$\int M^4\, dM - \int M^2\, dM = \frac{1}{5}\, M^5 - \frac{1}{3}\, M^3 + c =$$

$$\frac{1}{5}\, sec^5(x) - \frac{1}{3}\, sec^3(x) + c$$

$$\therefore \int \frac{tg^3(x)}{cos^3(x)}\, dx = \frac{1}{5}\, sec^5(x) - \frac{1}{3}\, sec^3(x) + c \ \square$$

$e)\ \int_1^5 |2x-3| \ \cdot \sqrt{x}\ \ dx$

Usando la definición de valor absoluto notamos que :

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & , \text{ si } 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3) & , \text{ si } 2x-3 < 0 \end{cases}$$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & , \text{ si } x \geq 3/2 \\ -(2x-3) & , \text{ si } x < 3/2 \end{cases}$$

Como $x = 3/2\ \in [1,5]$, debemos dividir la integral dada en dos integrales.

$$\int_1^5 |2x-3| \ \cdot \sqrt{x}\ \ dx =$$

$$-\int_1^{3/2} (2x-3)\ \cdot \sqrt{x}\ \ dx + \int_{3/2}^5 (2x-3)\ \cdot \sqrt{x}\ \ dx$$

Ahora

$$\int (2x-3)\ \cdot \sqrt{x}\ \ dx = 2\int x\ \cdot x^{1/2}\ \ dx - 3\int x^{1/2}\ \ dx =$$

$$2\int x^{3/2}\ \ dx - 3\int x^{1/2}\ \ dx = 2\,\tfrac{2}{5}\,x^{5/2} - 3\,\tfrac{2}{3}\,x^{3/2} = \tfrac{4}{5}\,x^{5/2} - 2\,x^{3/2}$$

Aplicando el teorema fundamental del Cálculo se tiene que :

$$-\int_1^{3/2} (2x-3)\ \cdot \sqrt{x}\ \ dx = -\left[\tfrac{4}{5}\,x^{5/2} - 2\,x^{3/2}\right]_1^{3/2} =$$

$$-\left[\tfrac{4}{5}\,(3/2)^{5/2} - 2\,(3/2)^{3/2} - \tfrac{4}{5} + 2\right] = 2\,(3/2)^{3/2} - \tfrac{4}{5}\,(3/2)^{5/2} - \tfrac{6}{5}$$

$$\int_{3/2}^5 (2x-3)\ \cdot \sqrt{x}\ \ dx = \left[\tfrac{4}{5}\,x^{5/2} - 2\,x^{3/2}\right]_{3/2}^{5} =$$

$$\tfrac{4}{5}\,5^{5/2} - 2\,5^{3/2} - \tfrac{4}{5}\,(3/2)^{5/2} + 2\,(3/2)^{3/2}$$

Por lo tanto

$$\int_1^5 |2x-3| \cdot \sqrt{x}\ dx =$$

$$2\,(3/2)^{3/2} - \frac{4}{5}\,(3/2)^{5/2} - \frac{6}{5} + \frac{4}{5}\,5^{5/2} - 2\,5^{3/2} - \frac{4}{5}\,(3/2)^{5/2} + 2\,(3/2)^{3/2}$$

$$= 4 \cdot (3/2)^{3/2} - \frac{8}{5} \cdot (3/2)^{5/2} - \frac{6}{5} + \frac{4}{5} \cdot 5^{5/2} - 2 \cdot 5^{3/2} =$$

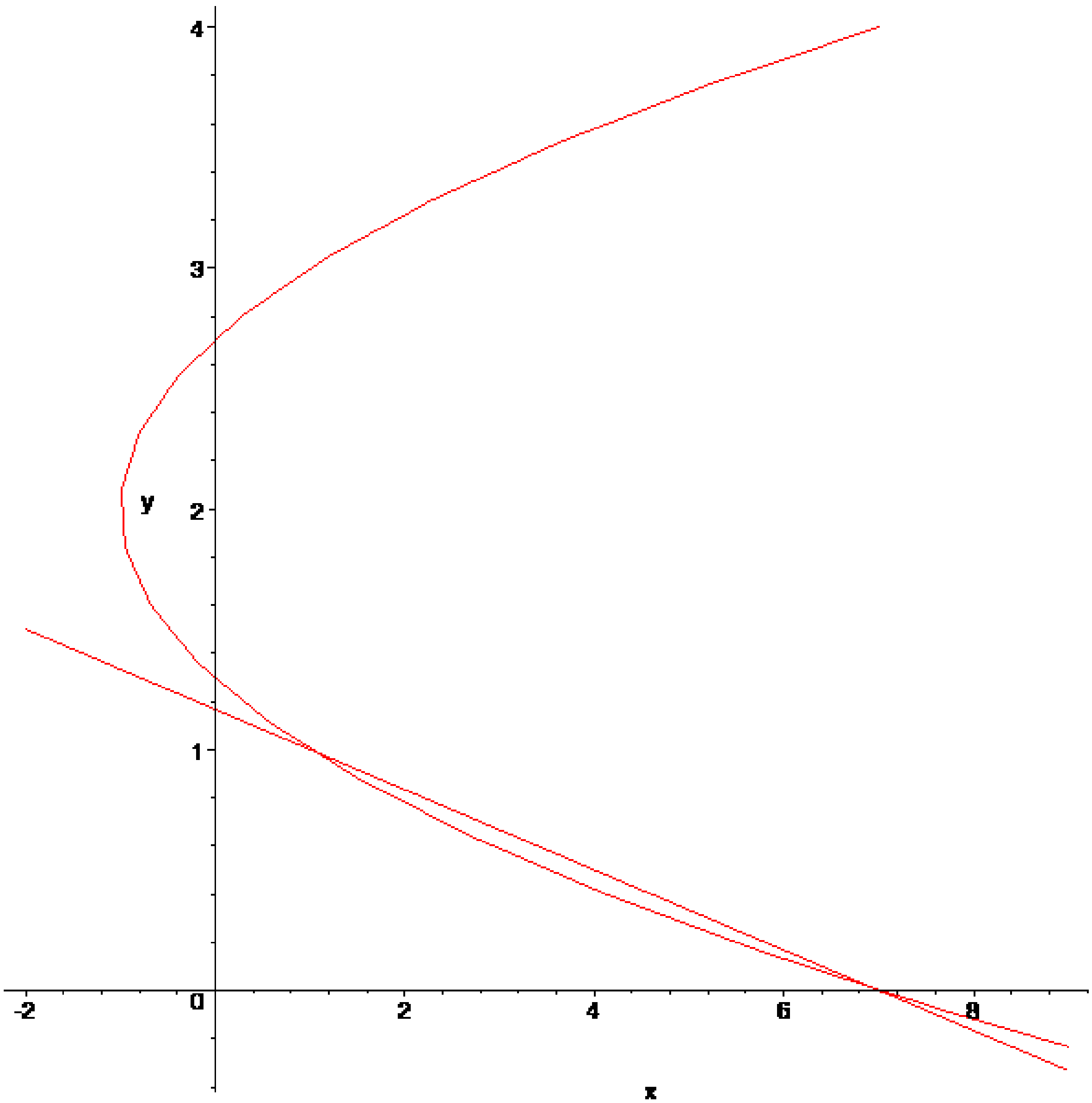
$$\frac{6\sqrt{6}}{5} - \frac{6}{5} + 10\sqrt{5}$$

$$\therefore \int_1^5 |2x-3| \cdot \sqrt{x}\ dx =$$

$$4 \cdot (3/2)^{3/2} - \frac{8}{5} \cdot (3/2)^{5/2} - \frac{6}{5} + \frac{4}{5} \cdot 5^{5/2} - 2 \cdot 5^{3/2} \quad \square$$

(2) Calcule el área de la región acotada por las curvas $x+1 = 2(y-2)^2$ y $x + 6y = 7$.
(10 puntos).

<u>Solución:</u>



Obtengamos los puntos de intersección entre las curvas.

De la ecuación de la recta tenemos que : $x + 6y = 7 \Rightarrow x = 7 - 6y$

Reemplazando en la ecuación de la parábola.

$x + 1 = 2(y-2)^2 \Rightarrow 7 - 6y + 1 = 2(y-2)^2 \Rightarrow 8 - 6y = 2\left(y^2 - 4y + 4\right) \Rightarrow$

$2y^2 - 8y + 8 + 6y - 8 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow 2y(y-1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \ \vee \ y_2 = 1$

Reemplazando estos valores en $x = 7 - 6y$ se obtiene

$x_1 = 7 - 6y_1 = 7 - 6(0) = 7 \Rightarrow x_1 = 7$

$x_2 = 7 - 6y_2 = 7 - 6(1) = 7 - 6 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

Los puntos de intersección son $P_1 = (x_1, y_1) = (7, 0)$ y $P_2 = (x_2, y_2) = (1, 1)$.

Si miramos la gráfica en sentido vertical observamos que la función mayor es la recta $y = \frac{1}{6}(7 - x)$ y la menor es la rama inferior de la parábola $y = -\sqrt{\frac{x+1}{2}} + 2$; luego el área encerrada por las curvas entre P_1 y P_2 es :

$$Area = \int_1^7 \left[\tfrac{1}{6}(7 - x) + \sqrt{\tfrac{x+1}{2}} - 2 \right] dx =$$

$$\tfrac{7}{6}\, x\Big|_1^7 - \tfrac{1}{6}\,\tfrac{1}{2}\, x^2\Big|_1^7 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}\Big|_1^7 - 2\,x\Big|_1^7 =$$

$$\tfrac{49}{6} - \tfrac{7}{6} - \tfrac{1}{12}\,(49 - 1) + \tfrac{2}{3\sqrt{2}}\,(8^{3/2} - 2^{3/2}) - 2(7 - 1) =$$

$$7 - 4 + \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - 12 = \tfrac{28}{3} - 9 = \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore\ Area = \tfrac{1}{3}\ \square$$

(Observación: Una forma más fácil de resolver el mismo problema es mirando la gráfica en sentido horizontal, es decir, considerando la función más a la derecha que es la recta $x = 7 - 6y$ y la función más a la izquierda que es la parábola $x = 2(y-2)^2 - 1$ e integrando en el intervalo $[0, 1]$:

$$Area = \int_0^1 \left[7 - 6y - 2(y-2)^2 + 1 \right] dy =$$

$$\int_0^1 \left[7 - 6y - 2y^2 + 8y - 8 + 1 \right] dy = \int_0^1 \left[2y - 2y^2 \right] dy =$$

$$2\int_0^1 \left[y - y^2 \right] dy = 2\,\tfrac{1}{2}\,y^2\Big|_0^1 - 2\,\tfrac{1}{3}\,y^3\Big|_0^1 = 1 - 0 - \tfrac{2}{3} + 0 = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}\ )$$