UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
***Juan Carlos Sandoval Avendaño***

# PAUTA TEST N° 6

CÁLCULO 1 - CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA AMBIENTAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE:______________________________________________ PTOS.: ______________
TIEMPO MÁXIMO: 60 MINUTOS FECHA: Vi 04/05/12

1. Para la función $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} cos\left(\dfrac{2\pi^2}{x}\right)+6\pi+1 & si\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi \\ \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{8\pi^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{2\pi}} & si\ 2\pi<x<8\pi \\ 14\pi & si\ x\geqslant 8\pi \end{cases}$$

   *a*) Calcule, si existen, los límites $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 8\pi} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\sqrt{777}} f(x)$ . Si alguno de ellos no existe, explique por qué.

   *b*) Muestre si $f$ es continua en $x=2\pi$

**(30 puntos).**

2. Calcule $f'(x)$ si

   *a*) $f(x)=\dfrac{1}{cos\,(x^3)-3x}$

   *b*) $f(x)=\sqrt{\pi}\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**(30 puntos).**

**Solución:**

1. Recordemos que debemos considerar la función $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} cos\left(\dfrac{2\pi^2}{x}\right)+6\pi+1 & si\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi \\ \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{8\pi^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{2\pi}} & si\ 2\pi<x<8\pi \\ 14\pi & si\ x\geqslant 8\pi \end{cases}$$

   *a*) Calculemos en primer lugar $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)$. Como $x=2\pi$ es un punto de quiebre debemos calcular límites laterales.

$$\lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x\to 2\pi}\left[cos\left(\frac{2\pi^2}{x}\right)+6\pi+1\right] = cos\left(\frac{2\pi^2}{2\pi}\right)+6\pi+1 = cos\,(\pi)+6\pi+1 = -1+6\pi+1=6\pi$$

   Para calcular el límite lateral por derecha usaremos una tabla porque al evaluar la función en el tramo correspondiente se produce una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Antes de construir la tabla es necesario notar que $2\pi\approx 6{,}283185307$ y $6\pi\approx 18{,}84955592$

   Construyamos la tabla.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 6,284 | 18,85072891 |
| 6,2832 | 18,85022177 |

   Observamos que a medida que nos acercamos a $2\pi$ la función tiende a $6\pi$.
   Luego $\lim\limits_{x\to 2\pi^+} f(x)=6\pi$.

   De lo anterior podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)=6\pi$.

   De manera similar tenemos que para calcular $\lim\limits_{x\to 8\pi} f(x)$ debemos en primer lugar determinar el límite lateral por izquierda; para ello usaremos una tabla, teniendo presente que $8\pi\approx 25{,}13274123$ y $14\pi\approx 43{,}98229715$

   Construyamos la tabla.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 25,1327 | 43,98224561 |
| 25,13274 | 43,98229561 |

Determinemos en segundo lugar el límite lateral por derecha.

$$\lim_{x \to 8\pi^+} f(x) = \lim_{x \to 8\pi} 14\pi = 14\pi$$

Observamos que a medida que nos acercamos a $8\pi$, por la izquierda o por la derecha, la función tiende a $14\pi$.
Luego $\lim\limits_{x \to 8\pi} f(x) = 14\pi$.

Calculemos finalmente $\lim\limits_{x \to \sqrt{777}} f(x)$. Para ello notemos que $\sqrt{777} \approx 27{,}8747 > 8\pi \approx 25{,}1327$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to \sqrt{777}} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{777}} 14\pi = 14\pi \ \square$$

*b*) Para que la función $f$ sea continua en $x = 2\pi$ se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to 2\pi} f(x) = f(2\pi)$. Ahora
$f(2\pi) = cos\left(\dfrac{2\pi^2}{2\pi}\right) + 6\pi + 1 = 6\pi$ y $\lim\limits_{x \to 2\pi} f(x) = 6\pi$, por lo tanto se cumple que $\lim\limits_{x \to 2\pi} f(x) = f(2\pi)$, es decir, la función $f$ es continua en $x = 2\pi$. $\square$

2. *a*) Calculemos la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{cos\,(x^3) - 3x}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{cos\,(x^3) - 3x}\right)' = ((cos\,(x^3) - 3x)^{-1})' = -(cos\,(x^3) - 3x)^{-2} \cdot (cos\,(x^3) - 3x)' = -(cos\,(x^3) - 3x)^{-2} \cdot (-sen\,(x^3) \cdot 3x^2 - 3) = \frac{3x^2 \cdot sen\,(x^3) + 3}{(cos\,(x^3) - 3x)^2}$$

Finalmente

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot sen\,(x^3) + 3}{(cos\,(x^3) - 3x)^2} \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{1}{cos\,(x^3) - 3x} \ \square$$

*b*) Calculemos la derivada de $f(x) = \sqrt{\pi} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f(x) = \sqrt{\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \left[\sqrt{\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\pi} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\pi} \cdot \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\pi} \cdot x \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{x} \, \square$