UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 4 COEFICIENTE 2

CÁLCULO 1 - CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL - INGENIERÍA AMBIENTAL - INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA - INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE:______________________________________ PTOS.: ____________
TIEMPO MÁXIMO: 1 HORA 20 MINUTOS FECHA: Vi 13/04/12

1. Esboce la región limitada por la recta $y - x + 1 = 0$ y la curva $y^2 - 2x = 6$, y obtenga los puntos de intersección entre ellas.

(15 puntos).

2. Grafique:

   a) $4x^2 - 2y^2 + y = 5$

   b) $3x^2 + 3x + 3y^2 - 4 = 8 - y$

   c) $4x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$

(30 puntos).

3. Obtenga la ecuación de la recta paralela a $4x - 2y = 2$ y que pasa por el punto medio entre $(1, -2)$ y $(6, 2)$.
   Grafique la recta obtenida.

(15 puntos).

Solución:

1. En primer lugar, para graficar la recta despejaremos la variable dependiente y luego obtendremos dos puntos que pertenezcan a la recta.

   $y - x + 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$

   La tabla de valores a usar para graficar la recta será:

x	y
0	-1
1	0

   En segundo lugar, para graficar la curva $y^2 - 2x = 6$ es necesario escribirla en forma canónica.

   $y^2 - 2x = 6 \Rightarrow y^2 = 2x + 6 \Rightarrow y^2 = 2(x+3) \Rightarrow (y-0)^2 = 2(x+3)$

   De la última ecuación notamos que la curva es una parábola cuyo vértice tiene coordenadas $(-3, 0)$ y además $4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2} > 0$, es decir, la parábola se extiende hacia la derecha.

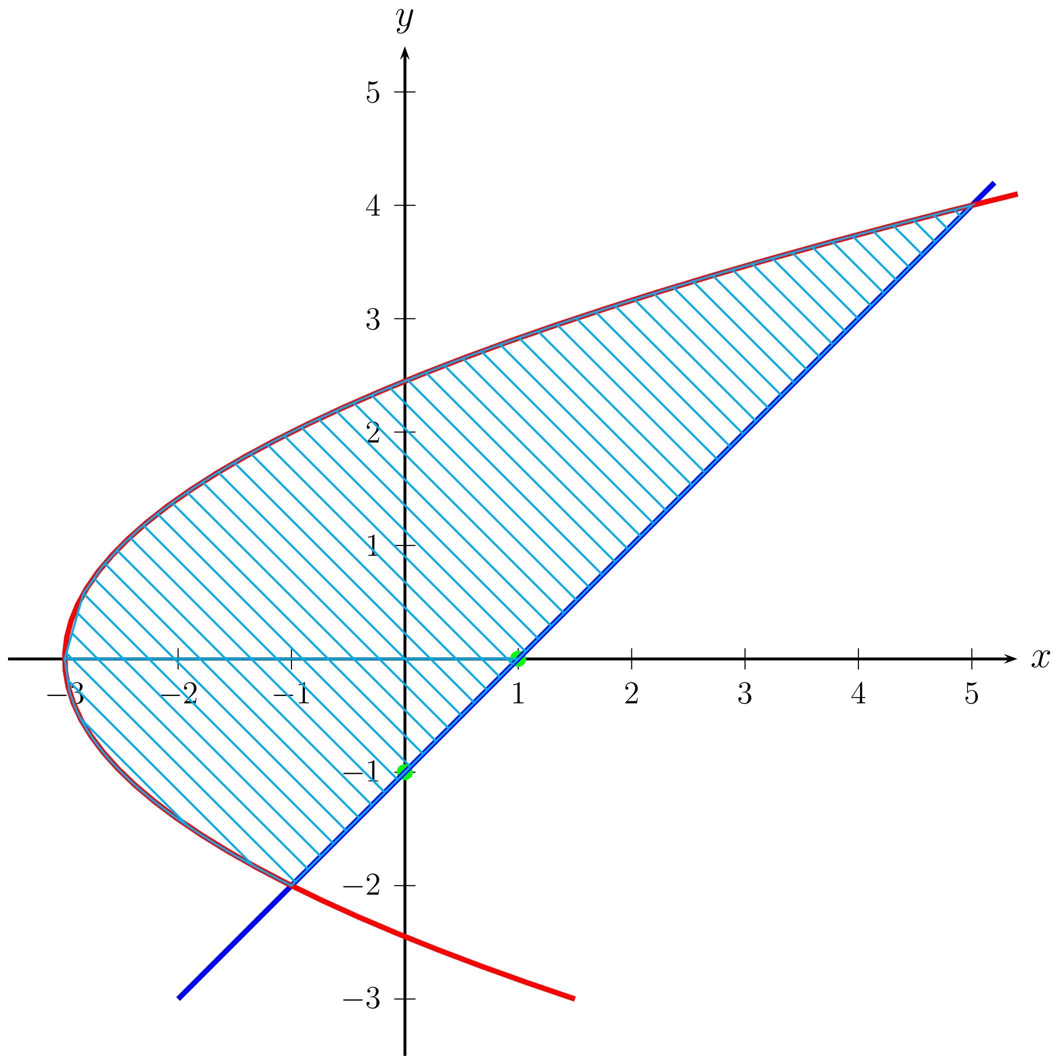
   Determinemos ahora las intersecciones de la parábola con los ejes coordenados.

   Eje x: $y = 0 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$

   Eje y: $x = 0 \Rightarrow y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$

   Luego los puntos de intersección con el eje y son $P_1 = \left(0, \sqrt{6}\right)$ y $P_2 = \left(0, -\sqrt{6}\right)$, y el punto de intersección con el eje x es $P_3 = (-3, 0)$

   Grafiquemos la recta y la parábola en un mismo sistema de ejes coordenados, y esbocemos la región acotada por ambas curvas.



Para terminar, determinemos los puntos de intersección entre las curvas; para ello reemplacemos $y = x - 1$ en $y^2 = 2x + 6$ para obtener:

$$(x-1)^2 = 2x+6 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4+6}{2} = 5 \\ \\ x_2 = \dfrac{4-6}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Reemplazando estos valores de x en $y = x - 1$, se tiene que $y_1 = x_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ y $y_2 = x_2 - 1 = -1 - 1 = -2$.
Finalmente los puntos de intersección entre la recta $y - x + 1 = 0$ y la parábola $y^2 - 2x = 6$ son $P_1 = (5, 4)$ y $P_2 = (-1, -2)$. $\square$

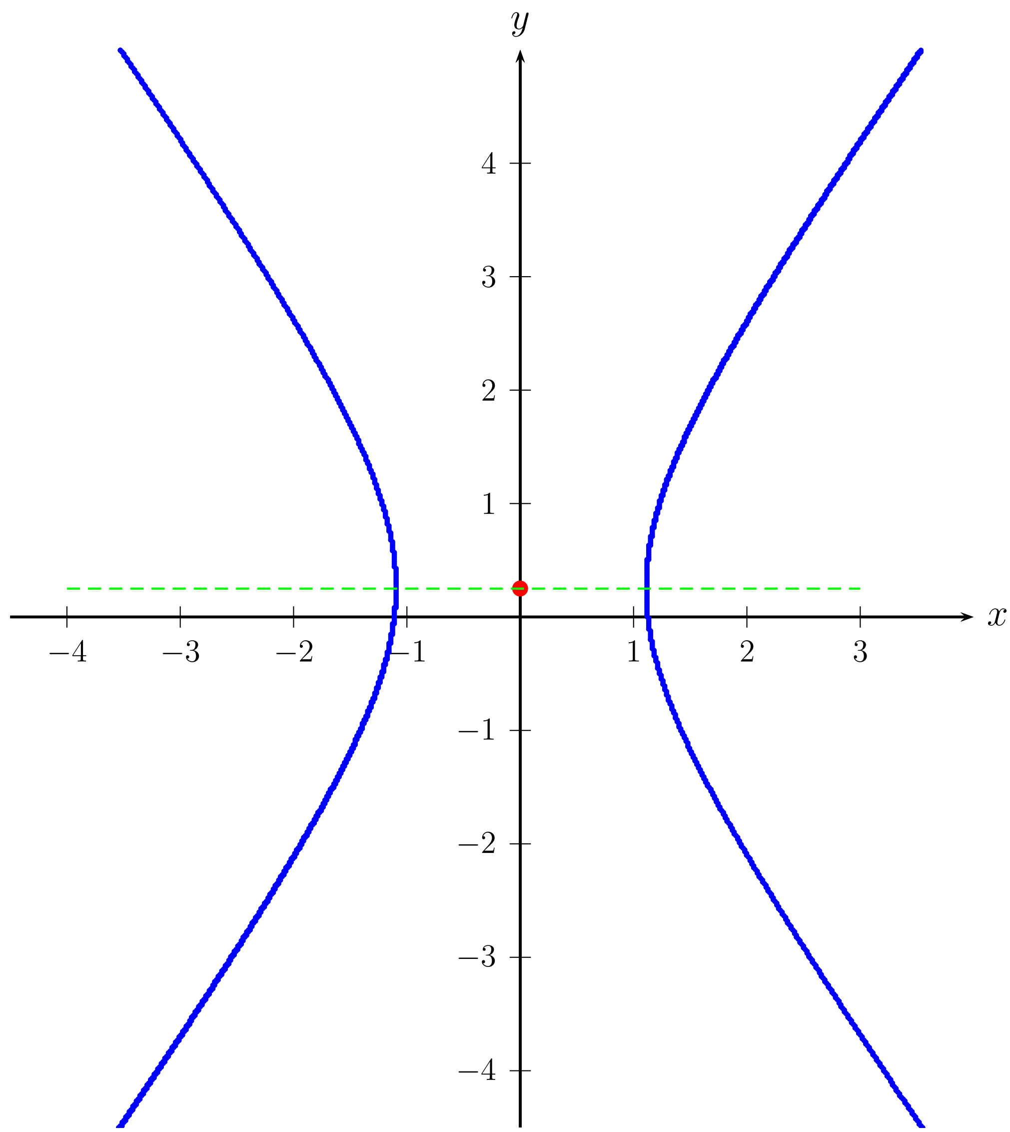
2. Grafiquemos las curvas mencionadas en el enunciado.

   a) Antes de graficar es necesario escribir la ecuación de la curva $4x^2 - 2y^2 + y = 5$ en forma canónica.

   $$4x^2 - 2y^2 + y = 5 \Rightarrow 4x^2 - 2\left(y^2 - \frac{1}{2}y\right) = 5 \Rightarrow 4x^2 - 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = 5 \Rightarrow$$
   $$4x^2 - 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{39}{8} \Rightarrow \frac{4x^2}{\frac{39}{8}} - \frac{2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{39}{8}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{39}{32}} - \frac{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{39}{16}} = 1$$

   De la ecuación canónica anterior notamos que la curva es una hipérbola con centro en $C = \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Además $a^2 = \frac{39}{32}$ y $b^2 = \frac{39}{16}$, es decir, $a = \sqrt{\frac{39}{32}} \approx 1{,}1$ y $b = \sqrt{\frac{39}{16}} \approx 1{,}6$
   Notemos que la hipérbola corta al eje x en los puntos $x_1 \approx -1{,}1$ y $x_2 \approx 1{,}1$.

   Con los antecedentes anteriores procedamos a graficar la hipérbola.



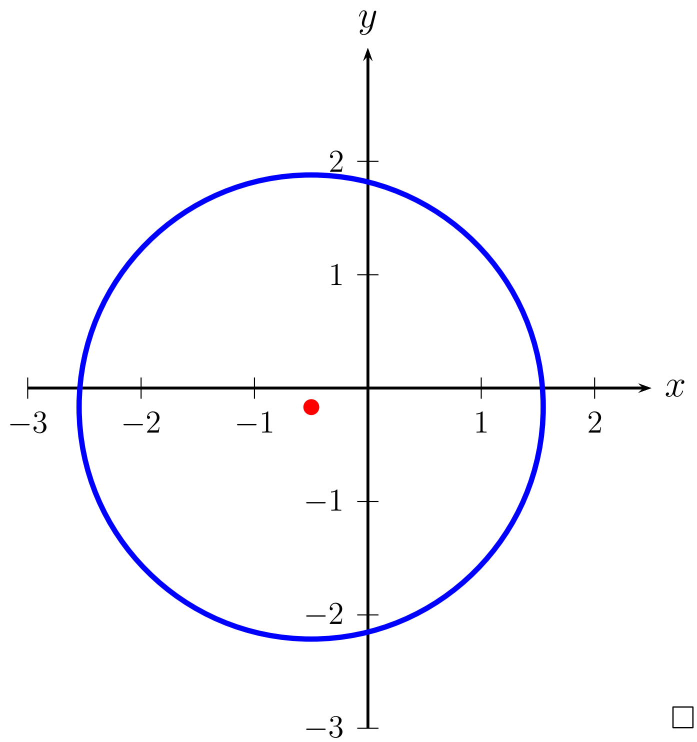
$\square$

b) Antes de graficar la curva $3x^2+3x+3y^2-4=8-y$ debemos escribirla en forma canónica.

$3x^2+3x+3y^2-4=8-y \Rightarrow (3x^2+3x)+(3y^2+y)=12 \Rightarrow 3(x^2+x)+3(y^2+\frac{1}{3}y)=12 \Rightarrow$
$(x^2+x)+(y^2+\frac{1}{3}y)=4 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}=4 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{6})^2=\frac{77}{18}$

Observamos que la última ecuación representa una circunferencia con centro en $C=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}\right)$ y radio $r=\sqrt{\dfrac{77}{18}}\approx 2{,}07$.

Grafiquemos ahora la circunferencia.



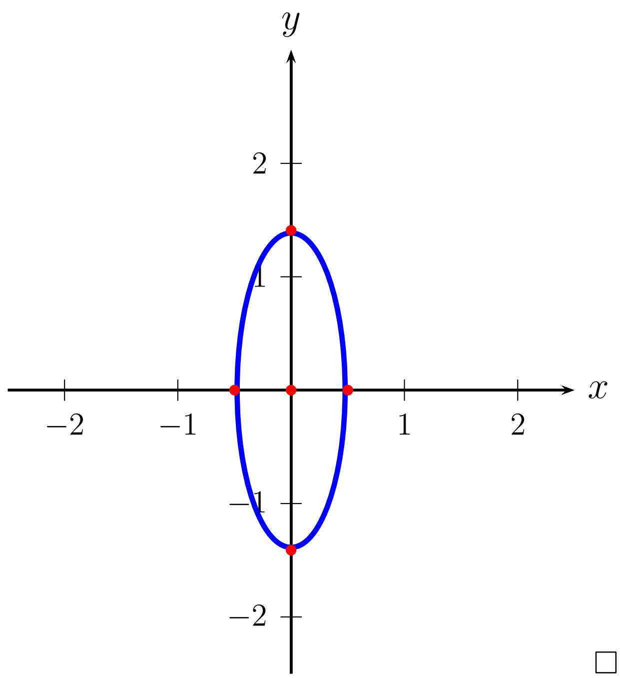
$\square$

c) Para graficar la curva $4x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 = 1$ primero la escribiremos en forma canónica.

$$4x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Se observa que la ecuación anterior representa una elipse con centro $C = (0,0)$, $a^2 = 2$ y $b^2 = \dfrac{1}{4}$. Además los puntos de intersección con los ejes son $P_1 = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, \sqrt{2}\right)$ y $P_4 = \left(0, -\sqrt{2}\right)$.

Usando los antecedentes anteriores se tiene que la gráfica es:



$\square$

3. Obtengamos ahora la ecuación de la recta paralela a $4x - 2y = 2$ y que pasa por el punto medio entre $(1, -2)$ y $(6, 2)$. Para ello debemos recordar que dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.
   $4x - 2y = 2 \Rightarrow 2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

   De la expresión anterior concluimos que la pendiente de la recta dada es $m_1 = 2$ que es igual a la pendiente m_2 de la recta que andamos buscando.

   Calculemos ahora el punto medio P_m entre $(1, -2)$ y $(6, 2)$.

   $$P_m = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

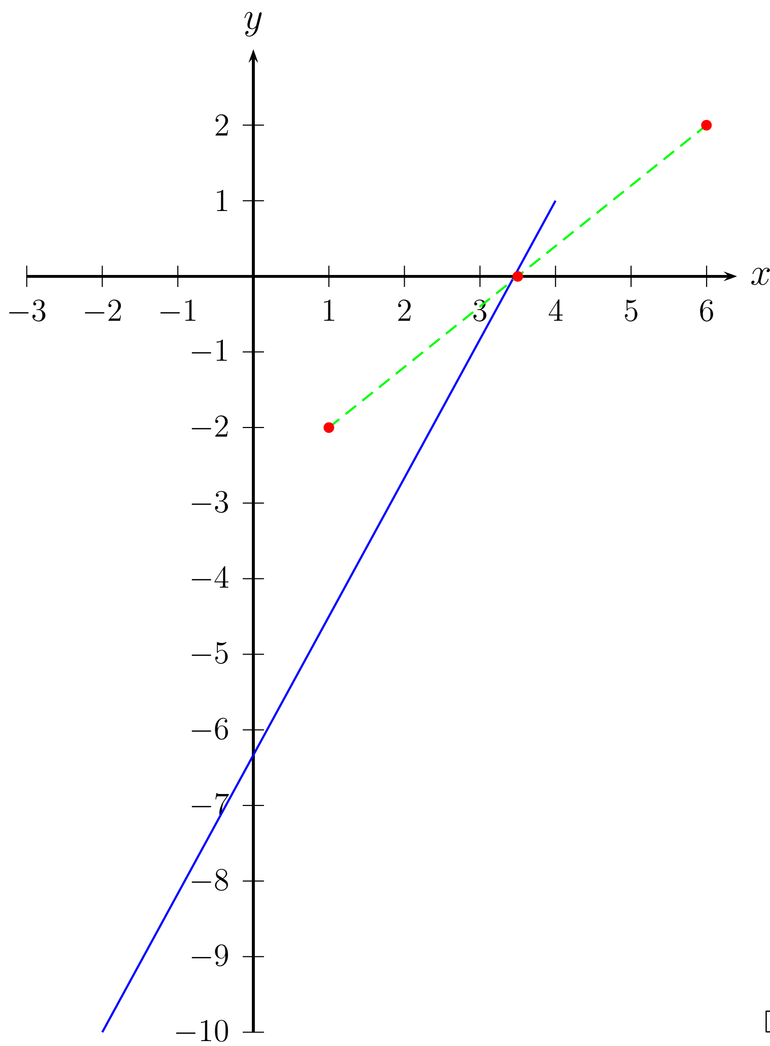
   Por tanto, dado que la recta buscada tiene pendiente igual a 2 y pasa por el punto $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, entonces su ecuación es:

   $$y - 0 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

   que podemos escribir como:

$y = 2x - 7$

Finalmente grafiquemos la recta obtenida.



$\square$