UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 4 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS **FECHA : Vi 08/11/24**

1) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$(1-x^2)\,y'\,'-2x\,y'+2y=0$

sabiendo que $y_1(x)=x$

(30 puntos)

Solución:

Escribamos la ecuación diferencial en la forma normal

$(1-x^2)\,y'\,'-2x\,y'+2y=0 \Rightarrow y'\,'-\frac{2x}{1-x^2}\,y'+\frac{2}{1-x^2}\,y=0$

Observamos que $p(x)=-\frac{2x}{1-x^2}$, con $x\neq 1$ y $x\neq -1$

Recordemos que conocida una solución de la ecuación homogénea, podemos calcular la otra usando la fórmula de Abel

$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}$

Calculemos $-\int p(x)dx$

$-\int p(x)dx=-\int-\frac{2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{2x}{1-x^2}dx=-ln|\,x^2-1|=ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right|$

Luego, $e^{-\int p(x)dx}=e^{ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right|}=\frac{1}{x^2-1}$

Así, $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}=x\int\frac{\frac{1}{x^2-1}}{x^2}dx=x\int\frac{1}{x^2(x^2-1)}dx=$

$x\left(\frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}x\,ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$

Finalmente, la solución general de ecuación diferencial dada es

$y(x)=c_1x+c_2\left(\frac{1}{2}x\,ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1\right)$ ❑

2) Se sabe que $y_1(x) = sen(e^x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a $y'' - y' + y\,e^{2x} = x\,e^{2x} - 1.$

Obtenga la solución general de la ecuación diferencial.

(30 puntos)

__**Solución:**__

En primer lugar calculemos la segunda solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, considerando que $p(x) = -1$

$y_2(x) = sen(e^x) \displaystyle\int \frac{e^x}{sen^2(e^x)} dx = sen(e^x) \int \frac{e^x}{sen^2(e^x)} dx = sen(e^x) \left(-\frac{1}{tg(e^x)} \right) =$

$-\,sen(e^x)\, \dfrac{cos(e^x)}{sen(e^x)} = -\,cos(e^x)$

Tenemos que $y_2(x) = -\,cos(e^x)$

Calculemos ahora la solución particular usando el método de variación de parámetros

$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen(e^x) & -\,cos(e^x) \\ e^x\,cos(e^x) & e^x\,sen(e^x) \end{vmatrix} = e^x\,sen^2(e^x) + e^x\,cos^2(e^x) =$

$e^x(sen^2(e^x) + cos^2(e^x)) = e^x \neq 0$

$c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -cos(e^x) \\ x\,e^{2x}-1 & e^x\,sen(e^x) \end{vmatrix}}{e^x} = \dfrac{(x\,e^{2x}-1)\,cos(e^x)}{e^x} \Rightarrow$

$c_1(x) = \displaystyle\int (x\,e^x\,cos(e^x)\,dx - \int \frac{cos(e^x)}{e^x} dx$

Para resolver la integral $\displaystyle\int (x\,e^x\,cos(e^x)\,dx$, podemos usar integración por partes

$p' = cos(e^x)\,e^x \Rightarrow p = sen(e^x)$

$q = x \Rightarrow q' = 1$

Luego,

$\displaystyle\int (x\,e^x\,cos(e^x)\,dx = x\,sen(e^x) - \int sen(e^x)\,dx = x\,sen(e^x) - \int \frac{e^x\,sen(e^x)}{e^x}\,dx$

$c_1(x) = x\,sen(e^x) - \displaystyle\int \frac{e^x\,sen(e^x)}{e^x}\,dx - \int \frac{cos(e^x)}{e^x} dx =$

$x\,sen(e^x) - \displaystyle\int \left(\frac{e^x\,sen(e^x)}{e^x} + \frac{cos(e^x)}{e^x} \right) dx =$

$x\,sen(e^x) - \displaystyle\int \left(\frac{e^x\,sen(e^x) + cos(e^x)}{e^x} \right) dx = x\,sen(e^x) + \frac{cos(e^x)}{e^x}$

$c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} sen(e^x) & 0 \\ e^x\,cos(e^x) & x\,e^{2x}-1 \end{vmatrix}}{e^x} = \dfrac{(x\,e^{2x}-1)\,sen(e^x)}{e^x} \Rightarrow$

$c_2(x) = \displaystyle\int (x\,e^x\,sen(e^x)\,dx - \int \frac{sen(e^x)}{e^x} dx$

Para resolver la integral $\displaystyle\int (x\,e^x\,sen(e^x)\,dx$, podemos usar integración por partes

$p' = sen(e^x)\, e^x \Rightarrow p = \, -cos(e^x)$
$q = x \Rightarrow q' = 1$
Luego,

$$\int (x\, e^x\, sen(e^x)\, dx = \, -x\, cos(e^x) + \int cos(e^x)\, dx = \, -x\, cos(e^x) + \int \frac{e^x\, cos(e^x)}{e^x}\, dx$$

$$c_2(x) = \, -x\, cos(e^x) + \int \frac{e^x\, cos(e^x)}{e^x}\, dx - \int \frac{sen(e^x)}{e^x} dx =$$

$$-x\, cos(e^x) + \int \left(\frac{e^x\, cos(e^x)}{e^x} - \frac{sen(e^x)}{e^x} \right) dx =$$

$$-x\, cos(e^x) + \int \left(\frac{e^x\, cos(e^x) - sen(e^x)}{e^x} \right) dx = \, -x\, cos(e^x) + \frac{sen(e^x)}{e^x}$$

Finalmente, la solución particular es

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) \, + c_2(x) y_2(x) =$$

$$\left(x\, sen(e^x) + \frac{cos(e^x)}{e^x} \right) sen(e^x) \, - \left(-x\, cos(e^x) + \frac{sen(e^x)}{e^x} \right) cos(e^x) =$$

$$x\, sen^2(e^x) + \frac{cos(e^x)}{e^x} sen(e^x) + x\, cos^2(e^x) - \frac{sen(e^x)}{e^x} cos(e^x) =$$

$$x\, sen^2(e^x) + x\, cos^2(e^x) = x(sen^2(e^x) + cos^2(e^x)) = x$$

La solución particular es $y_p(x) = x$
La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x) + y_p = c_1 sen(e^x) - c_2\, cos(e^x) + x$$

Observación: Si hubiésemos usado GeoGebra en todos los cálculos, entonces tendríamos las siguientes soluciones

$$c_1(x) = \frac{2x\, e^x\, tg(\frac{e^x}{2}) - tg^2(\frac{e^x}{2}) + 1}{e^x + e^x tg^2(\frac{e^x}{2})}$$

$$c_2(x) = \frac{2\, tg(\frac{e^x}{2}) - x\, e^x + x\, e^x\, tg^2(\frac{e^x}{2})}{e^x + e^x tg^2(\frac{e^x}{2})} \quad \square$$