

PAUTA TEST N° 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 20 MINUTOS

FECHA : Ju 16/10/25

1) Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 gramos de sal. Salmuera que tiene 1 gramo de sal por litro entra al tanque con una razón de 4 L/min ; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $x(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque en el instante t .

Resuelva el problema anterior suponiendo que al tanque entra agua pura.

(20 puntos)

Solución:

a) Tenemos que

$V_0 = 200 \text{ litros}$, $x_0 = 30 \text{ gramos}$, $c_E = 1 \text{ gramo/litro}$, $r_E = 4 \text{ litros/minuto} = r_S$

La ecuación diferencial a desarrollar es

$$\frac{dx}{dt} = c_E r_E - c_S r_S = 1(4) - 4 \frac{x}{200} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4 - \frac{x}{50} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{x}{50} = 4$$

$$p(t) = \frac{1}{50}, q(t) = 4$$

$$x(t) = e^{-\int p(t) dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t) dt} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{50} \int dt} \left[4 \int e^{\frac{1}{50} \int dt} dt + c \right] \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{t}{50}} \left[4 \int e^{\frac{t}{50}} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{50}} \left[4(50) e^{\frac{t}{50}} + c \right] \Rightarrow x(t) = 200 + c e^{-\frac{t}{50}}$$

Ahora, dado que $x_0 = x(0) = 30$, se tiene que

$$200 + c = 30 \Rightarrow c = 30 - 200 \Rightarrow c = -170$$

Finalmente, $x(t) = 200 - 170 e^{-\frac{t}{50}}$

b) Si $c_E = 0$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = -4 \frac{x}{200} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{50} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{50} dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{1}{50} dt \Rightarrow$$

$$\ln(x) = -\frac{t}{50} + c \Rightarrow x(t) = k e^{-\frac{t}{50}}$$

$$x_0 = x(0) = 30 \Rightarrow k = 30$$

$$\text{Finalmente, } x(t) = 30 e^{-\frac{t}{50}} \quad \square$$

2) Se conectan un resistor de 40Ω y un inductor de $0.1H$ en serie con una fuente de voltaje de $110V$. Si inicialmente no existe corriente sobre el circuito, determine la corriente en cualquier instante.

(20 puntos)

Solución:

La ecuación diferencial para un circuito RL es

$$iR + L \frac{di}{dt} = E$$

Considerando los datos del ejercicio:

$$iR + L \frac{di}{dt} = E \Rightarrow 40 i + 0.1 \frac{di}{dt} = 110 \Rightarrow 40 i + \frac{1}{10} \frac{di}{dt} = 110 \Rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} + 400 i = 1100$$

$$p(t) = 400, q(t) = 1100$$

$$i(t) = e^{-\int p(t) dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t) dt} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$i(t) = e^{-400t} \left[1100 \int e^{400t} dt + c \right] \Rightarrow i(t) = e^{-400t} \left[\frac{1100}{400} e^{400t} + c \right] \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{11}{4} + c e^{-400t}$$

Sabemos que $i(0) = 0$, luego

$$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{11}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{11}{4}$$

$$\text{Finalmente, } i(t) = \frac{11}{4} - \frac{11}{4} e^{-400t} \quad \square$$

3) Resuelva la EDO $3y'' - 2y' + y = x + 5$

(20 puntos)

Solución:

Resolvamos la edo homogénea asociada

$$3y'' - 2y' + y = 0$$

$$3r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6} \Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \Rightarrow r = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{6} \Rightarrow$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \\ r_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \end{cases}$$

$$y_h(x) = e^{\frac{x}{3}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) \right]$$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados.

$$y_p(x) = A + Bx \Rightarrow y_p'(x) = B \Rightarrow y_p''(x) = 0$$

$$3y_p'' - 2y_p' + y_p = x + 5 \Rightarrow 3(0) - 2B + A + Bx = x + 5 \Rightarrow$$

$$Bx + (A - 2B) = x + 5 \Rightarrow B = 1, A - 2B = 5 \Rightarrow B = 1, A = 5 + 2B \Rightarrow$$

$$B = 1, A = 7$$

$$y_p(x) = 7 + x$$

Finalmente,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{\frac{x}{3}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) \right] + 7 + x \quad \square$$