UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

TEST N° 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Vi 11/10/24**

1) Resuelva las E.D.O.

$a)\, y'' - y = cos(x)$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea asociada $y'' - y = 0$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es $y_h(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$

Obtengamos una solución particular $y_p(x)$

$$y_p(x) = A\, sen(x) + B\, cos(x)$$
$$y_p'(x) = A\, cos(x) - B\, sen(x)$$
$$y_p''(x) = -A\, sen(x) - B\, cos(x)$$
$$y_p'' - y_p = -A\, sen(x) - B\, cos(x) - A\, sen(x) - B\, cos(x) =$$
$$-2A\, sen(x) - 2B\, cos(x) \equiv cos(x) \Rightarrow -2A = 0,\ -2B = 1 \Rightarrow A = 0,\ B = -\frac{1}{2}$$

Luego $y_p(x) = -\frac{1}{2}\ cos(x)$

La solución final de la edo $y'' - y = cos(x)$ es

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} - \frac{1}{2}\ cos(x)$ ❑

$b)\; y'' - 3\,y' = 1,\; y(1) = 0,\; y'(1) = 0$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' = 0$

$$r^2 - 3r = 0 \Rightarrow r(r-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es $y_h(x) = c_1 + c_2\,e^{3\,x}$

Obtengamos una solución particular $y_p(x)$

$y_p(x) = A + Bx$
$y_p'(x) = B$
$y_p''(x) = 0$
$y_p'' - 3y_p' = 0 - 3B = -3B \equiv 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$
Luego $y_p(x) = -\frac{1}{3}x$

La solución general de la edo $y'' - 3y' = 1$ es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2\,e^{3\,x} - \frac{1}{3}x$$

Consideremos ahora las condiciones iniciales $y(1) = 0$ y $y'(1) = 0$

$$y(1) = c_1 + c_2\,e^3 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c_1 + e^3\,c_2 = \frac{1}{3} \qquad (*)$$
$$y'(x) = 3c_2\,e^{3x} - \frac{1}{3} \Rightarrow y'(1) = 3c_2\,e^3 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3\,e^3\,c_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{9\,e^3}$$

Reemplazando este último resultado en la ecuación $(*)$ se tiene

$$c_1 + e^3\,c_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} - e^3\,c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} - e^3\,\frac{1}{9\,e^3} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{9}$$

Finalmente, la solución del P.V.I. es

$$y(x) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9\,e^3}\,e^{3\,x} - \frac{1}{3}x \quad \square$$