

**PAUTA TEST N° 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 60 MINUTOS **FECHA : Mi 06/05/26**

1) Resuelva la E.D.O. $y'' - 3y' + 2y = 4x^2 + e^{3x}$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ r_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

Obtengamos la solución particular $y_{p_1}(x)$ para la edo $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

$$y_{p_1}(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_{p_1}(x) = 2Ax + B \Rightarrow y''_{p_1}(x) = 2A$$

$$y''_{p_1}(x) - 3y'_{p_1}(x) + 2y_{p_1}(x) = 2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C =$$

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) \equiv 4x^2 \Rightarrow 2A = 4; 2B - 6A = 0;$$

$$2A - 3B + 2C = 0$$

$$A = 2; B = 3A = 6; 2C = 3B - 2A \Rightarrow 2C = 18 - 4 \Rightarrow 2C = 14 \Rightarrow C = 7$$

$$\text{Luego } y_{p_1}(x) = Ax^2 + Bx + C = 2x^2 + 6x + 7$$

Obtengamos ahora la solución particular $y_{p_2}(x)$ para la edo $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

$$y_{p_2}(x) = D e^{3x} \Rightarrow y'_{p_2}(x) = 3D e^{3x} \Rightarrow y''_{p_2}(x) = 9D e^{3x}$$

$$y''_{p_2}(x) - 3y'_{p_2}(x) + 2y_{p_2}(x) = 9D e^{3x} - 9D e^{3x} + 2D e^{3x} = 2D e^{3x} \equiv e^{3x} \Rightarrow$$

$$2D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} e^{3x}$$

Finalmente, la solución de la edo original es

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2x^2 + 6x + 7 + \frac{1}{2} e^{3x} \quad \square$$

2) Resuelva el P.V.I. $y'' + y = 5e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

(30 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la edo homogénea asociada $y'' + y = 0$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i = 0 + 1i \\ r_2 = -i = 0 - 1i \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Obtengamos la solución particular $y_p(x)$

$$y_p(x) = A e^{-x} \Rightarrow y'_p(x) = -A e^{-x} \Rightarrow y''_p(x) = A e^{-x}$$

$$y''_p(x) + y_p(x) = A e^{-x} + A e^{-x} = 2A e^{-x} \equiv 5 e^{-x} \Rightarrow 2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$\text{Luego, } y_p(x) = \frac{5}{2} e^{-x}$$

La solución de la edo $y'' + y = 5e^{-x}$ es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{5}{2} e^{-x}$$

Usemos las condiciones iniciales para obtener los valores de las constantes c_1 y c_2

$$y(0) = c_1 + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - \frac{5}{2} e^{-x}$$

$$y'(0) = c_2 - \frac{5}{2} = 3 \Rightarrow c_2 = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

Finalmente, la solución del P.V.I. es $y(x) = -\frac{3}{2} \cos(x) + \frac{11}{2} \sin(x) + \frac{5}{2} e^{-x}$ $\square$