

PAUTA TEST N° 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS

FECHA : Ju 02/10/25

1) Suponga que un estudiante portador de un virus de gripe, regresa a un campus universitario, aislado, que tiene 2200 estudiantes. Asuma que la rapidez con que el virus se propaga, es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también, al número de estudiantes no contagiados. Determine el número de estudiantes contagiados después de 6 días, sabiendo que después de 4 días ya eran 50 los contagiados.

(15 puntos)

Solución:

Sea $P(t)$ el número de estudiantes contagiados en el instante t

Luego, $\frac{dP}{dt} = k P (2200 - P)$

Sabemos además que $P(0) = 1$ y $P(4) = 50$

Resolvamos la ecuación diferencial, que es de variables separables.

$$\frac{dP}{dt} = k P (2200 - P) \Rightarrow \frac{dP}{P(2200-P)} = k dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P(2200-P)} = k \int dt \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2200} \ln(P) + \frac{1}{2200} \ln(2200 - P) = kt + c \Rightarrow \frac{1}{2200} \ln(P(2200 - P)) = kt + c$$

Consideremos ahora la condición inicial $P(0) = 1$

$$\frac{1}{2200} \ln(1(2200 - 1)) = k(0) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2200} \ln(2199) \approx 3.498071814 \times 10^{-3}$$

Ahora, $P(4) = 50$:

$$\frac{1}{2200} \ln(50(2200 - 50)) = 4k + c \Rightarrow 4k = \frac{1}{2200} \ln(107500) - c \Rightarrow$$
$$4k \approx 5.266020967 \times 10^{-3} - 3.498071814 \times 10^{-3} = 1.767949153 \times 10^{-3} \Rightarrow$$
$$k \approx 4.419872881 \times 10^{-4}$$

Debemos calcular $P(6)$:

$$\frac{1}{2200} \ln(P(2200 - P)) = 6k + c \Rightarrow \ln(P(2200 - P)) = 13200k + 2200c \Rightarrow$$
$$P(2200 - P) = e^{13200k+2200c} \Rightarrow 2200P - P^2 = e^{13200k+2200c} \Rightarrow$$
$$P^2 - 2200P + e^{13200k+2200c} = 0 \Rightarrow P = \frac{2200 \pm \sqrt{2200^2 - 4e^{13200k+2200c}}}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2200 \pm \sqrt{2200^2 - 4e^{5.834232203+7.695757991}}}{2} \Rightarrow$$

$$P = \frac{2200 \pm \sqrt{2200^2 - 4e^{13.52999019}}}{2} \Rightarrow P \approx \frac{2200 \pm \sqrt{4840000 - 3006492.139}}{2}$$

$$\Rightarrow P \approx \frac{2200 \pm \sqrt{1833507.861}}{2} \Rightarrow P \approx \frac{2200 \pm 1354.070848}{2} \Rightarrow$$

$$P \approx \frac{2200 - 1354.070848}{2} \Rightarrow P \approx \frac{845.9291522}{2} \Rightarrow P \approx 422.9645761 \approx 423$$

Después de 6 días hay aproximadamente 423 estudiantes contagiados. $\square$

2) Obtenga las trayectorias ortogonales para la familia de curvas $x^2 + y^2 = 2cx$
(15 puntos)

Solución:

$$x^2 + y^2 = 2cx \Rightarrow 2x + 2yy' = 2c \Rightarrow x + 2yy' = c \Rightarrow 2yy' = c - x \Rightarrow y' = \frac{c-x}{y}$$

$$x^2 + y^2 = 2cx \Rightarrow c = \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

$$\text{Luego, } y' = \frac{c-x}{y} = \frac{\frac{x^2 + y^2}{2x} - x}{y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Calculemos ahora la familia de curvas ortogonales a las dadas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Resolvamos la ecuación diferencial. Observamos que es de coeficientes homogéneos, es decir, debemos considerar la sustitución $y = vx$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{2x(vx)}{x^2 - (vx)^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{2x^2v}{x^2 - x^2v^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{2x^2v}{x^2(1-v^2)} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{2v}{1-v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{2v}{1-v^2} - v \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{2v - v + v^3}{1-v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{v + v^3}{1-v^2} \Rightarrow \frac{1-v^2}{v+v^3} dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-v^2}{v+v^3} dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \text{GeoGebra}$$

$$\frac{1}{2} \ln(v^2) - \ln(v^2 + 1) = \ln(x) + k \Rightarrow \ln(v) - \ln(v^2 + 1) = \ln(x) + k \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{v}{v^2+1}\right) = \ln(x) + k \Rightarrow \frac{v}{v^2+1} = Kx \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1} = Kx \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = Kx \Rightarrow$$

$$\frac{y x}{y^2+x^2} = K x \Rightarrow \frac{y}{y^2+x^2} = K$$

Finalmente, la familia de trayectorias ortogonales a $x^2 + y^2 = 2c x$ es $\frac{y}{y^2+x^2} = K$, con $K > 0$ constante. $\square$

3) Se ha observado en el laboratorio, que el radio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad de radio presente. Su vida media es de 1600 años. ¿Que porcentaje desaparecerá en un año?

(15 puntos)

Solución:

Sea R la cantidad de radio en el instante t

Tenemos que $\frac{dR}{dt} = k R$

Además, $R(1600) = \frac{R_0}{2}$, donde R_0 representa la cantidad de radio inicial, es decir, en el instante $t = 0$

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dR}{dt} = k R \Rightarrow \frac{dR}{R} = k dt \Rightarrow \int \frac{dR}{R} = k \int dt \Rightarrow \ln(R) = k t + c \Rightarrow R(t) = C e^{k t}$$

$$R(0) = R_0 \Rightarrow C = R_0$$

$$R(t) = R_0 e^{k t}$$

Sabemos que $R(1600) = \frac{R_0}{2}$:

$$R(1600) = R_0 e^{1600 k} \Rightarrow \frac{R_0}{2} = R_0 e^{1600 k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{1600 k} \Rightarrow 1600 k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1600} \approx -4.332169879 \times 10^{-4}$$

$$\text{Ahora, } R(1) = R_0 e^k \approx R_0 e^{-4.332169879 \times 10^{-4}} = 0.999566876 R_0$$

Finalmente, en un año se ha desintegrado aproximadamente un 0.0433% $\square$

4) Un asado de 2 kilos, inicialmente a $10^\circ C$, se coloca en un horno a $190^\circ C$ a las 11 de la mañana. Después de 75 minutos se observa que la temperatura del asado es de $52^\circ C$. ¿Cuándo estará el asado a $66^\circ C$?

(15 puntos)

Solución:

Este es un problema de calentamiento. Usemos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k (M - T)$$

donde T es la temperatura del asado, t es el tiempo que ha transcurrido desde que se dejó el asado en el horno, M es la temperatura del horno que se supone constante y k es la constante de proporcionalidad.

Resolvamos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(M - T) \Rightarrow \frac{dT}{M-T} = k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{M-T} = k \int dt \Rightarrow$$

$$-\ln(M - T) = kt + c \Rightarrow \ln(M - T) = -kt - c \Rightarrow M - T = C e^{-kt} \Rightarrow$$

$$T(t) = M - C e^{-kt}, \text{ con } C > 0$$

De acuerdo al enunciado, $T(0) = 10$, $M = 190$ y $T(75) = 52$

$$T(0) = 10 \Rightarrow M - C = 10 \Rightarrow 190 - C = 10 \Rightarrow C = 190 - 10 \Rightarrow C = 180$$

$$\text{Luego, } T(t) = 190 - 180 e^{-kt}$$

Ahora $T(75) = 52$, es decir

$$190 - 180 e^{-75k} = 52 \Rightarrow 190 - 52 = 180 e^{-75k} \Rightarrow \frac{138}{180} = e^{-75k} \Rightarrow$$

$$-75k = \ln\left(\frac{138}{180}\right) \Rightarrow k = -\frac{\ln\left(\frac{138}{180}\right)}{75} \Rightarrow k \approx 3.542708876 \times 10^{-3}$$

Usando la información anterior, calculemos t de modo que $T(t) = 66$

$$190 - 180 e^{-3.542708876 \times 10^{-3} t} = 66 \Rightarrow 190 - 66 = 180 e^{-3.542708876 \times 10^{-3} t} \Rightarrow$$

$$e^{-3.542708876 \times 10^{-3} t} = \frac{124}{180} \Rightarrow 3.542708876 \times 10^{-3} t = \ln\left(\frac{124}{180}\right) \Rightarrow t \approx \frac{\ln\left(\frac{124}{180}\right)}{3.542708876 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow t \approx 105.1950071 \text{ minutos} \approx 1 \text{ hora } 45 \text{ minutos aprox.}$$

El asado estará a $66^\circ C$ aproximadamente a las 12 : 45 horas. $\square$