

**PAUTA TEST N° 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS **FECHA : Mi 25/03/26**

1) Resuelva la E.D.O. $x \frac{dy}{dx} = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

(30 puntos)

Solución:

$$x \frac{dy}{dx} = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \quad (*)$$

Consideremos el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$, es decir, $y = vx$

$$\text{Luego } \frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en (*), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{vx + x \cos^2\left(\frac{vx}{x}\right)}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = \frac{x(v + \cos^2(v))}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = v + \cos^2(v) \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \cos^2(v) \Rightarrow \frac{dv}{\cos^2(v)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \sec^2(v) dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \sec^2(v) dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{tg}(v) = \ln|x| + c \Rightarrow v(x) = \operatorname{Arctg}(\ln|x| + c)$$

Regresando a la variable dependiente original

$$v(x) = \operatorname{Arctg}(\ln|x| + c) \Rightarrow \frac{y(x)}{x} = \operatorname{Arctg}(\ln|x| + c) \Rightarrow y(x) = x \operatorname{Arctg}(\ln|x| + c) \quad \square$$

2) Resuelva el P.V.I. $y dx + (2x + y) dy = 0$, $y(1) = 1$

(30 puntos)

Solución:

$$y dx + (2x + y) dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x+y} \quad (**)$$

Consideremos el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$, es decir, $y = vx$

$$\text{Luego } \frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en (**), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x+y} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = -\frac{vx}{2x+vx} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x + v = -\frac{xv}{x(2+v)} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{v}{(2+v)} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = -\frac{v}{(2+v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{-v-2v-v^2}{(2+v)} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-3v-v^2}{(2+v)} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = -\frac{v^2+3v}{(2+v)} \Rightarrow \frac{2+v}{v^2+3v} dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2+v}{v^2+3v} dv = -\int \frac{dx}{x} \quad (***)$$

Resolvamos la integral $\int \frac{2+v}{v^2+3v} dv$

$$\frac{2+v}{v^2+3v} = \frac{2+v}{v(v+3)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+3} \Rightarrow 2+v = A(v+3) + Bv$$

$$v = 0 : 2 = 3A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$v = -3 : -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\text{Luego } \int \frac{2+v}{v^2+3v} dv = \frac{2}{3} \int \frac{1}{v} dv + \frac{1}{3} \int \frac{1}{v+3} dv = \frac{2}{3} \ln|v| + \frac{1}{3} \ln|v+3|$$

Reemplazando en (***)

$$\int \frac{2+v}{v^2+3v} dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{2}{3} \ln|v| + \frac{1}{3} \ln|v+3| = -\ln|x| + c$$

Volvamos a la variable dependiente original

$$\frac{2}{3} \ln|v| + \frac{1}{3} \ln|v+3| = -\ln|x| + c \Rightarrow \frac{2}{3} \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{3} \ln\left|\frac{y}{x} + 3\right| = -\ln|x| + c \Rightarrow$$

Ahora utilicemos la condición inicial $y(1) = 1$ para obtener el valor de c

$$\frac{2}{3} \ln\left|\frac{1}{1}\right| + \frac{1}{3} \ln\left|\frac{1}{1} + 3\right| = -\ln|1| + c \Rightarrow \frac{2}{3} \ln|1| + \frac{1}{3} \ln|4| = -\ln|1| + c \Rightarrow$$

$$c = \frac{1}{3} \ln|4|$$

Finalmente, la solución de la edo original está dada en forma implícita por

$$\frac{2}{3} \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{3} \ln\left|\frac{y}{x} + 3\right| = -\ln|x| + \frac{1}{3} \ln|4| \quad \square$$