

PAUTA CERTAMEN N° 3 PARTE 2
ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ju 04/12/25

1) a) Muestre que el sistema de Cauchy-Euler $t \mathbf{X}'(t) = A \mathbf{X}(t)$, $t > 0$, donde A es una matriz constante, tienen soluciones no triviales de la forma $\mathbf{X}(t) = t^r \mathbf{U}$ si y sólo si r es un valor propio de A y $\mathbf{U}$ es un vector propio correspondiente.

b) Obtenga la solución general de: $t \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t)$, $t > 0$

(15 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} a) \mathbf{X}(t) = t^r \mathbf{U} &\Leftrightarrow \mathbf{X}'(t) = r t^{r-1} \mathbf{U} \Leftrightarrow t \mathbf{X}'(t) = r t^r \mathbf{U} \Leftrightarrow A \mathbf{X}(t) = r t^r \mathbf{U} \Leftrightarrow \\ A t^r \mathbf{U} &= r t^r \mathbf{U} \Leftrightarrow t^{r \neq 0} A \mathbf{U} = r \mathbf{U} \end{aligned}$$

Esto muestra que r es un valor propio de A con vector propio asociado $\mathbf{U}$, con $\mathbf{U}$ no nulo, pues estamos considerando soluciones no triviales. $\square$

b)

Calculemos los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 3 \\ -1 & 5-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(5-a) + 3 = 0 \Rightarrow 5 - 6a + a^2 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ a_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Para $a_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ -1 & 5-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, v_1 \neq 0$$

Si $v_1 = 1$, entonces $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $a_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ -1 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-w_1 + 3w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = 3w_2$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w_2 \\ w_2 \end{pmatrix}, w_2 \neq 0$$

Si $w_2 = 1$, entonces $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

De acuerdo a la parte a), se tiene que

$$\mathbf{X}_1(t) = t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{X}_2(t) = t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \square$$

2) Usando el método de eliminación resuelva: $x' = 2x + y$; $y' = x - y$ (15 puntos)

Solución:

Despejemos y de la ecuación $x' = 2x + y$

$$y = x' - 2x$$

Luego $y' = x' - 2x$. Reemplacemos y' y y en la segunda ecuación.

$$y' = x - y \Rightarrow x' - 2x = x - x' + 2x \Rightarrow x' - x' - 3x = 0 \Rightarrow r^2 - r - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Tenemos que: $x(t) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t}$

Calculemos $x'(t) = \frac{1+\sqrt{13}}{2}c_1 e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} + \frac{1-\sqrt{13}}{2}c_2 e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t}$

$$y(t) = x' - 2x =$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}c_1 e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} + \frac{1-\sqrt{13}}{2}c_2 e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t} - 2c_1 e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} - 2c_2 e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t} =$$

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2} - 2 \right) e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} - 2 \right) e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t} =$$

$$c_1 \left(\frac{\sqrt{13}-3}{2} \right) e^{\frac{1+\sqrt{13}}{2}t} + c_2 \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2} \right) e^{\frac{1-\sqrt{13}}{2}t} \quad \square$$

3) Usando la transformada de Laplace, resuelva:

$$\begin{aligned}x(t)'' &= y(t) + f(t) \\y(t)'' &= x(t) + g(t) \\x(0) &= y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ \text{con } f(t) &= \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \quad \text{y} \quad g(t) = 1\end{aligned}$$

(15 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned}x(t)'' &= y(t) + f(t) \Rightarrow \mathcal{L}[x(t)''] = \mathcal{L}[y(t)] + \mathcal{L}[f(t)] \\y(t)'' &= x(t) + g(t) \Rightarrow \mathcal{L}[y(t)''] = \mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 X(s) - sx(0) - x(0) &= Y(s) + \frac{s+1}{s^2+1} \\s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) &= X(s) + \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 X(s) &= Y(s) + \frac{s+1}{s^2+1} \\s^2 Y(s) &= X(s) + \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 X(s) - Y(s) &= \frac{s+1}{s^2+1} \\-X(s) + s^2 Y(s) &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Resolvamos el sistema usando el método de Cramer

$$\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ -1 & s^2 \end{vmatrix} = s^4 - 1$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s+1}{s^2+1} & -1 \\ \frac{1}{s} & s^2 \end{vmatrix}}{s^4-1} = \frac{\frac{s+1}{s^2+1} s^2 + \frac{1}{s}}{s^4-1} = \frac{\frac{s^3(s+1) + (s^2+1)}{s(s^2+1)}}{s^4-1} = \frac{s^3(s+1) + s^2 + 1}{s(s^4-1)(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} \cos(t) - \frac{t}{4} \cos(t) + \frac{t}{4} \operatorname{sen}(t) - 1$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 & \frac{s+1}{s^2+1} \\ -1 & \frac{1}{s} \end{vmatrix}}{s^4-1} = \frac{s + \frac{s+1}{s^2+1}}{s^4-1} = \frac{\frac{s(s^2+1) + (s+1)}{(s^2+1)}}{s^4-1} = \frac{s(s^2+1) + s + 1}{(s^4-1)(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{t}{4} \cos(t) - \frac{t}{4} \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t) \quad \square$$

4) Usando valores y vectores propios resuelva:

$$x'_1 = 4x_1 + 2x_2$$

$$x'_2 = 3x_1 - x_2$$

(15 puntos)

Solución:

Escribamos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4-a & 2 \\ 3 & -1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-a)(-1-a) - 6 = 0 \Rightarrow -4 - 4a + a + a^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ a_2 = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

Para $a_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 3 & -1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, v_2 \neq 0$$

$$\text{Si } v_2 = 1, \text{ entonces } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $a_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 4+2 & 2 \\ 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$6w_1 + 2w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = -3w_1$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ -3w_1 \end{bmatrix}, w_1 \neq 0$$

$$\text{Si } w_1 = 1, \text{ entonces } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \square$$