UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Vi 29/11/24**

1) Resuelva los sistemas

$$a)\ \boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$$

$$b)\ \boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1.8 & 0 \\ 0 & 5.1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3.1 & 4 & 0 \\ -2.8 & 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$$

(15 puntos)

Solución:

$a)$ Usando GeoGebra, tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1$; los vectores propios respectivos son

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Notamos que $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son $l.i.$, porque no es uno múltiplo escalar del otro, por lo que la solución es $\boldsymbol{v} = c_1\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3\, e^{-t} \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

Por otro lado, si lo trabajamos en forma algebraica, tenemos que para $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow^{F_1(1)+F_2;F_1(-2)+F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ el vector propio asociado a $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$2a - 2b + 2c = 0 \Rightarrow a = b - c$ (Fijamos las incógnitas b y c)

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son $l.i.$, por lo que la solución es $\boldsymbol{v} = c_1\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ❑

$b)$ Usando GeoGebra tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = -2.92$; $\lambda_2 = -0.16$; $\lambda_3 = 2.03$; $\lambda_4 = 4.1$ y $\lambda_5 = 5.05$

Los vectores propios asociados son

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.26 \\ -0.16 \\ -0.83 \\ -0.35 \\ 0.32 \end{pmatrix}; \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.47 \\ 0.22 \\ 0.05 \\ -0.8 \end{pmatrix}; \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.64 \\ 0.32 \\ 0.17 \\ -0.6 \end{pmatrix}; \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -0.28 \\ -0.84 \\ -0.28 \\ 0.18 \\ 0.34 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} -0.03 \\ -0.95 \\ -0.24 \\ -0.2 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es

$$\boldsymbol{v} = c_1\, e^{-2.92t} \begin{pmatrix} 0.26 \\ -0.16 \\ -0.83 \\ -0.35 \\ 0.32 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-0.16t} \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0.47 \\ 0.22 \\ 0.05 \\ -0.8 \end{pmatrix} + c_3\, e^{2.03t} \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.64 \\ 0.32 \\ 0.17 \\ -0.6 \end{pmatrix} +$$

$$c_4\, e^{4.1t} \begin{pmatrix} -0.28 \\ -0.84 \\ -0.28 \\ 0.18 \\ 0.34 \end{pmatrix} + c_5\, e^{5.05t} \begin{pmatrix} -0.03 \\ -0.95 \\ -0.24 \\ -0.2 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$ ❑

2) Resuelva el sistema con valores iniciales

$x'(t) - 2y(t) = 4t,\ x(0) = 4$
$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2,\ y(0) = -5$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

Tenemos que

$x'(t) - 2y(t) = 4t,\ x(0) = 4$

$y'(t) + 2y(t) - 4x(t) = -4t - 2,\ y(0) = -5$

$x'(t) = 2y(t) + 4t$

$y'(t) = 4x(t) - 2y(t) - 4t - 2$

Escribamos el sistema en forma matricial, con $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ -4t-2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{X}'(t) = A\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t) \Rightarrow \boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} 4t \\ -4t-2 \end{pmatrix}$

Además, $\boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Resolvamos, en primer lugar, el sistema homogéneo asocociado

$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t)$

Calculemos los valores y vectores propios usando GeoGebra

$a_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = -4,\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La solución homogénea es $\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora la solución particular

$\boldsymbol{X}_p(t) = \boldsymbol{\phi}(t) \int \boldsymbol{\phi}^{-1}(t)\, \boldsymbol{F}(t)\, dt$, donde $\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-4t} \\ e^{2t} & 2e^{-4t} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{-2t}+e^{-2t}} \begin{pmatrix} 2e^{-4t} & e^{-4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3e^{-2t}} \begin{pmatrix} 2e^{-4t} & e^{-4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)\, \boldsymbol{F}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t \\ -4t-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4te^{-2t} - 2e^{-2t} \\ -8te^{4t} - 2e^{4t} \end{pmatrix}$

$\int \boldsymbol{\phi}^{-1}(t)\, \boldsymbol{F}(t)\, dt = \frac{1}{3} \int \begin{pmatrix} 4te^{-2t} - 2e^{-2t} \\ -8te^{4t} - 2e^{4t} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2te^{-2t} \\ -2te^{4t} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{X}_p(t) = \boldsymbol{\phi}(t) \int \boldsymbol{\phi}^{-1}(t)\, \boldsymbol{F}(t)\, dt =$

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-4t} \\ e^{2t} & 2e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2te^{-2t} \\ -2te^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2t-4t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}$

Consideremos la condición inicial $\boldsymbol{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$c_1 - c_2 = 4$

$c_1 + 2c_2 = -5$
$c_1 - c_2 = 4$
$-c_1 - 2c_2 = 5$
$-3c_2 = 9 \Rightarrow c_2 = -3$
$c_1 = 4 + c_2 = 4 - 3 = 1$
Finalmente, la solución es
$\boldsymbol{X}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 3\,e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2t\end{pmatrix}$ ❑

3) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __V__ $\{cos(x),\, cos(3x),\, cos(5x), ...\}$ es ortogonal en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
Justificación:
Sean $f(x) = cos(nx)$ y $g(x) = cos(mx)$, donde n y m son números impares distintos.
$< f, g > = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(nx)\, cos(mx)\, dx =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[cos((n+m)x) + cos((n-m)x)\, dx =$
$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [cos((n+m)x)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [cos((n-m)x)\, dx =$
$\frac{1}{2(n+m)} sen((n+m)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2(n-m)} sen((n-m)x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$
pues la suma y la resta de dos números impares nos da un número par, que multiplicado por $\frac{\pi}{2}$ nos da un múltiplo de π y sabemos que seno evaluado en los múltiplos de π es siempre 0. Además seno evaluado en 0 es 0. ❑

$b)$ __V__ La serie de Fourier de $f(x) = x + \pi$ es $\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$
Justificación:
Tenemos que $p = \pi$ y $f(x) = x + \pi$, luego
$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\, dx = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2}x^2 + \pi x]_{-\pi}^{\pi} =$
$\frac{1}{\pi}[\frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2] = 2\pi$
$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\, cos(\frac{n\pi}{\pi}x)\, dx =$
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\, cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n}\, sen(n\pi) = 0$
$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\, sen(\frac{n\pi}{\pi}x)\, dx =$
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\, sen(nx)\, dx = \frac{2\, sen(n\pi) - 2n\pi\, cos(n\pi)}{n^2\pi} = \frac{-2n\pi\,(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n}$
$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

Finalmente,
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos(nx) + b_n\, sen(nx) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx)$ $\square$

$c)$ __V__ Las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda\, y = 0$, $y'(0),\ y'(L) = 0$ son $y(x) = c\ \cdot cos(n\pi x/L)$, con $c \neq 0$
Justificación:
$y'' + \lambda\, y = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

Caso 1: $-\lambda = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$
$y(x) = c_1 + c_2 x$

$y'(x) = c_2$

$y'(0) = c_2 = 0$
$y'(L) = c_2 L = 0 \Rightarrow c_2 = 0$, pues $L > 0$

En este caso la solución es $y(x) = c_1$, con c_1 una constante real cualquiera.

Caso 2: $-\lambda > 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{-\lambda} \\ r_2 = -\sqrt{-\lambda} \end{cases}$

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

$y'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,x} - c_2\sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

$y'(0) = c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0$
$y'(L) = c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - c_2\sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} = 0 \Rightarrow$
$\sqrt{-\lambda}\,(c_1\ e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,L}) = 0 \Rightarrow c_1\ e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} = 0$

Luego tenemos que resolver el sistema

$c_1 - c_2 = 0 \qquad (1)$
$c_1\ e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} = 0 \qquad (2)$

De $(1):\ c_1 = c_2$
Reemplazando en (2)
$c_2\ e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} = 0 \Rightarrow c_2\,(\,e^{\sqrt{-\lambda}\,L} - e^{-\sqrt{-\lambda}\,L}) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
Así, $c_1 = c_2 = 0$

En este caso la solución es la nula, es decir, $y(x) = 0$

Caso 3: $-\lambda < 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{\lambda}\, i \\ r_2 = -\sqrt{\lambda}\, i \end{cases}$

$y(x) = c_1\, cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2\, sen(\sqrt{\lambda}\, x)$

$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\, sen(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2\sqrt{\lambda}\, cos(\sqrt{\lambda}\, x)$

$y'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
$y'(L) = -c_1\sqrt{\lambda}\, sen(\sqrt{\lambda}\, L) + c_2\sqrt{\lambda}\, cos(\sqrt{\lambda}\, L) \Rightarrow^{c_2=0} -c_1\sqrt{\lambda}\, sen(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$
$\Rightarrow^{c_1\neq 0} \sqrt{\lambda}\, sen(\sqrt{\lambda}\, L) = 0 \Rightarrow sen(\sqrt{\lambda}\, L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, L = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow$
$\lambda_n = \frac{n^2\,\pi^2}{L^2},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Los valores propios son $\lambda_n = \frac{n^2\,\pi^2}{L^2},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Reemplazando este resultado en $y(x)$ se tiene
$y(x) = c_1\, cos(\sqrt{\lambda}\, x) = c_1\, cos(\frac{n\pi}{L} x)$

Las funciones propias son $y_n = c \cdot cos(\frac{n\pi}{L} x),\ n = 0, 1, 2, \ldots.,$ con $c \neq 0$ ❑

(30 puntos)