

**PAUTA CERTAMEN N° 3 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 24/06/26**

1) Resuelva la edo $x'' + x = \cos(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos esta ecuación diferencial usando la Transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}x'' + x &= \cos(t) \Rightarrow \mathcal{L}[x''] + \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\cos(t)] \Rightarrow \\s^2 \mathcal{L}[x] - s y(0) - y'(0) + \mathcal{L}[x] &= \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow s^2 \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[x] = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \\(s^2 + 1) \mathcal{L}[x] &= \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}[x] = \frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2+1)^2} \right] = \frac{1}{2} t \sin(t)\end{aligned}$$

Finalmente, la solución del P.V.I. dado es $x(t) = \frac{1}{2} t \sin(t)$ $\square$

2) Use series para resolver $y' - 2xy = 0$

(15 puntos)

Solución:

$$\text{Sea } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

Reemplazando en la edo $y' - 2xy = 0$

$$\begin{aligned}y' - 2xy &= 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} &= 0\end{aligned}$$

Debemos igualar las potencia de x y además igualar el primer valor del índice en cada serie.

Sea $k = n - 1$, es decir, $n = k + 1$. Además si n comienza en 1, entonces k comienza en 0.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$

Por otro lado, para la segunda serie, si $k = n + 1$, entonces $n = k - 1$ y si n comienza en 0, k comienza en 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k$$

De lo anterior, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1) c_{k+1} - 2c_{k-1}] x^k = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ y } (k+1) c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0$$

$$(k+1) c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0 \Rightarrow c_{k+1} = \frac{2}{k+1} c_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = 1 : c_2 = \frac{2}{2} c_0 = c_0$$

$$k = 2 : c_3 = \frac{2}{3} c_1 = 0$$

$$k = 3 : c_4 = \frac{2}{4} c_2 = \frac{1}{2} c_0$$

$$k = 4 : c_5 = \frac{2}{5} c_3 = 0$$

$$k = 5 : c_6 = \frac{2}{6} c_4 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{3 \cdot 2} c_0$$

$$k = 6 : c_7 = \frac{2}{6} c_5 = 0$$

$$k = 7 : c_8 = \frac{2}{8} c_6 = \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} c_0 = \frac{1}{4!} c_0$$

Tenemos que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + \dots$$

$$= c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + c_8 x^8 + \dots =$$

$$c_0 + c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_0 x^4 + \frac{1}{3 \cdot 2} c_0 x^6 + \frac{1}{4!} c_0 x^8 + \dots =$$

$$c_0 (1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 2} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 + \dots) =$$

$$c_0 (1 + x^2 + \frac{1}{2!} (x^2)^2 + \frac{1}{3!} (x^2)^3 + \frac{1}{4!} (x^2)^4 + \dots) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = c_0 e^{x^2}$$

Finalmente, $y(x) = c_0 e^{x^2}$ $\square$

3) Resuelva $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar el sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

Calculemos los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 1 \\ 4 & 3-\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6-\alpha)(3-\alpha) - 4 = 0 \Rightarrow 18 - 9\alpha + \alpha^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 - 9\alpha + 14 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios asociados.

Para $\alpha_1 = 7$:

$$\begin{pmatrix} 6-7 & 1 \\ 4 & 3-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-a + b = 0 \Rightarrow b = a$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, a \neq 0$$

$$\text{Si } a = 1, \text{ entonces } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 6-2 & 1 \\ 4 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$4c + d = 0 \Rightarrow d = -4c$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -4c \end{pmatrix}, c \neq 0$$

$$\text{Si } c = 1, \text{ entonces } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema homogéneo es $\mathbf{X}_h = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Para encontrar la solución particular $\mathbf{X}_p$ usaremos el método de los coeficientes indeterminados.

Dado que $F(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$ posee sólo polinomios de grado 1, podemos

considerar $\mathbf{X}_p = \mathbf{z}t + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, de donde, $\mathbf{X}'_p = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Reemplazando $\mathbf{X}_p$ en el sistema original, se tiene

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z_1 + z_2 \\ 4z_1 + 3z_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 6z_1 + z_2 \\ 4z_1 + 3z_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t \Rightarrow$$

$$- \begin{pmatrix} 6z_1 + z_2 \\ 4z_1 + 3z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$6z_1 + z_2 = -6$$

$$4z_1 + 3z_2 = 10$$

$$-18z_1 - 3z_2 = 18$$

$$4z_1 + 3z_2 = 10$$

$$-14z_1 = 28 \Rightarrow z_1 = -\frac{28}{14} = -2$$

$$z_2 = -6 - 6z_1 = -6 + 12 = 6$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6w_1 + w_2 \\ 4w_1 + 3w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$6w_1 + w_2 = -2$$

$$4w_1 + 3w_2 = 2$$

$$-18w_1 - 3w_2 = 6$$

$$4w_1 + 3w_2 = 2$$

$$-14w_1 = 8 \Rightarrow w_1 = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}$$

$$w_2 = -2 - 6w_1 = -2 + \frac{24}{7} = \frac{10}{7}$$

La solución particular es $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \quad \square$$

4) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

F $\left\{ \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

Justificación:

Notemos que $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix}$ es tal que $\mathbf{X}'_1 = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix}$, pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^t \\ 2e^{-t} - e^t \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix} = \mathbf{X}'_1$$

Esto muestra que $\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix}$ no es solución del sistema $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$ $\square$

(15 puntos)