

**PAUTA CERTAMEN N° 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Ju 30/10/25

1) Resuelva el P.V.I. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos la homogénea $y'' + 2y' + 5y = 0$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{16} \sqrt{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-2 \pm 4i}{2} \Rightarrow r = -1 \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 + 2i \\ r_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

$$y_h(x) = e^{-x} [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]$$

Usemos el método de coeficientes indeterminados para obtener la solución particular

$$y_p(x) = A e^{-x} \Rightarrow y_p'(x) = -A e^{-x} \Rightarrow y_p''(x) = A e^{-x}$$

$$y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 8e^{-x} \Rightarrow A e^{-x} - 2A e^{-x} + 5A e^{-x} = 8e^{-x} \Rightarrow 4A e^{-x} = 8e^{-x} \Rightarrow$$

$$4A = 8 \Rightarrow A = 2$$

$$y_p(x) = 2e^{-x}$$

$$y(x) = e^{-x} [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)] + 2e^{-x}$$

Usemos las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 2 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$y'(x) = -e^{-x} [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)] + e^{-x} [-2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x)] - 2e^{-x}$$

$$y'(0) = 8 \Rightarrow -c_1 + 2c_2 - 2 = 8 \Rightarrow 2 + 2c_2 - 2 = 8 \Rightarrow 2c_2 = 8 \Rightarrow c_2 = 4$$

$$\text{Finalmente, } y(x) = e^{-x} [-2 \cos(2x) + 4 \sin(2x)] + 2e^{-x} \quad \square$$

2) Un tanque contiene 450 litros de líquido en el que se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 3 gr/lit se bombea al tanque con una intensidad de 6 lt/min y la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con una intensidad de 8 lt/min. Encuentre la cantidad de sal en un instante cualquiera.

(15 puntos)

Solución:

Tenemos que: $V_0 = 450 \text{ lt}$, $x_0 = 30 \text{ gr}$, $c_E = 3 \text{ gr/lt}$, $r_E = 6 \text{ lt/min}$, $r_S = 8 \text{ lt/min}$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{r_S}{V_0 + (r_E - r_S)t} x = r_E c_E \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{8}{450 + (6-8)t} x = 6(3) \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{8}{450-2t} x = 18 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{4}{225-t} x = 18 \Rightarrow$$

$$p(t) = \frac{4}{225-t} \quad y \quad q(t) = 18$$

Notemos que

$$e^{\int \frac{4}{225-t} dt} = e^{-4 \ln(225-t)} = \frac{1}{(225-t)^4}$$

Luego

$$x(t) = \frac{1}{e^{\int \frac{4}{225-t} dt}} \left[\int 18 e^{\int \frac{4}{225-t} dt} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$x(t) = (225-t)^4 \left[18 \int \frac{1}{(225-t)^4} dt + c \right] \Rightarrow$$

$$x(t) = (225-t)^4 \left[18 \frac{1}{3(225-t)^3} + c \right] \Rightarrow x(t) = (225-t)^4 \left[\frac{6}{(225-t)^3} + c \right] \Rightarrow$$

$$x(t) = 6(225-t) + c(225-t)^4$$

Sabemos que $x(0) = 30$

$$x(0) = 30 \Rightarrow 1350 + 225^4 c = 30 \Rightarrow c = -\frac{1320}{225^4}$$

De donde

$$x(t) = 6(225-t) - \frac{1320}{225^4} (225-t)^4 \Rightarrow x(t) = 6(225-t) - 1320 \left(\frac{225-t}{225} \right)^4$$

Finalmente la concentración de sal en un instante cualquiera es

$$x(t) = 6(225-t) - 1320 \left(\frac{225-t}{225} \right)^4 \quad \square$$

3) Sabiendo que $y_1 = x^2$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \operatorname{sen}(x)$, con $x > 0$, encuentre su solución general usando el método de variación de parámetros.

(15 puntos)

Solución:

La ecuación homogénea asociada es

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{2x}{x^2} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow {}^{x>0} y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$$

La fórmula de Abel, con $p(x) = -\frac{2}{x}$, nos permite obtener $y_2(x)$, pues ya sabemos que $y_1(x) = x^2$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x^2 \int \frac{e^{2 \int \frac{1}{x} dx}}{(x^2)^2} dx = x^2 \int \frac{e^{2 \ln(x)}}{x^4} dx =$$

$$x^2 \int \frac{x^2}{x^4} dx = x^2 \int \frac{1}{x^2} dx = x^2 \int x^{-2} dx = x^2 (-x^{-1}) = -x$$

$$y_2(x) = -x$$

Notemos que la edo no homogénea, en forma normal, es

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x \operatorname{sen}(x)$$

Usemos el método de variación de parámetros para obtener la solución particular que tendrá la forma $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

Calculemos en primer lugar el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -x \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -x^2 + 2x^2 = x^2 \neq 0, \text{ pues } x > 0$$

El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} x^2 & -x \\ 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \operatorname{sen}(x) \end{bmatrix}$$

Usemos el método de Cramer

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -x \\ x \operatorname{sen}(x) & -1 \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$c_1(x) = -\cos(x)$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x \operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{x^3 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = x \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$c_2(x) = \operatorname{sen}(x) - x \cos(x)$$

Finalmente, la solución general de la edo es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) =$$

$$c_1 x^2 - c_2 x + \cos(x) x^2 - (\operatorname{sen}(x) - x \cos(x))x =$$

$$c_1 x^2 - c_2 x - x^2 \cos(x) - x \operatorname{sen}(x) + x^2 \cos(x) =$$

$$c_1 x^2 - c_2 x - x \operatorname{sen}(x) \quad \square$$

4) Se conecta en serie un resistor de 4Ω , un capacitor de $0.05F$ y un inductor de $0.2H$ a una fuente de voltaje de $50V$. Determine la carga en el capacitor y la corriente por el circuito, si inicialmente la carga es de $2C$ y no circula corriente por el circuito.

(15 puntos)

Solución:

La ecuación diferencial para este circuito RLC es

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L}$$

$$R = 4, C = 0.05, L = 0.2, E = 50 \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{4}{0.2} = 20; \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.2(0.05)} = 100;$$

$$\frac{E}{L} = \frac{50}{0.2} = 250$$

$$q'' + 20q' + 100q = 250$$

Resolvamos la ecuación diferencial homogénea asociada $q'' + 20q' + 100 = 0$

$$q = 0 \Rightarrow r^2 + 20r + 100 = 0 \Rightarrow r = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -10 \\ r_2 = -10 \end{cases}$$

$$q_h(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 t e^{-10t}$$

Resolvamos ahora la ecuación diferencial no homogénea por el método de coeficientes indeterminados.

$$q_p(t) = A \Rightarrow q_p'(t) = 0 \Rightarrow q_p''(t) = 0$$

$$q_p'' + 20 q_p' + 100 q_p = 100 \Rightarrow 0 + 0 + 100A = 250 \Rightarrow 100A = 250 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$q_p(t) = \frac{5}{2}$$

$$\text{Luego } q(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 t e^{-10t} + \frac{5}{2}$$

Usemos las condiciones iniciales $q(0) = 2$, $i(0) = 0$, para obtener las constantes

c_1 y c_2

$$q(0) = 2 \Rightarrow c_1 + \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$$

$$i(t) = q'(t) = -10 c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-10t} - 10 c_2 t e^{-10t}$$

$$i(0) = 0 \Rightarrow -10 c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 10 c_1 \Rightarrow c_2 = -5$$

Finalmente la carga en el capacitor es $q(t) = -\frac{1}{2} e^{-10t} - 5 t e^{-10t} + \frac{5}{2}$ y la corriente por el circuito es $i(t) = 50 t e^{-10t}$ $\square$