UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Vi 25/10/24**

1) El número de habitantes $P(t)$ de una cierta ciudad satisface la ley logística
$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{100}P - \frac{1}{10^8}P^2$
donde el tiempo t se mide en años. Suponiendo que el número de habitantes de esta ciudad es de 1619530 en el año 2022, determine:
$i)$ El número de habitantes como una función del tiempo.
$ii)$ La población en el año 2041
$iii)$ El año en que se duplicará la población de 2022
$iv)$ ¿Cuál será la población después de medio siglo a contar de 2022?

(15 puntos)

<u>**Solución:**</u>
$i)$ Sean $a = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ y $b = \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$
$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{100}P - \frac{1}{10^8}P^2 \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = aP - bP^2$
$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \Rightarrow \frac{dP}{P(a-bP)} = dt \Rightarrow \frac{1}{a}\, ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + c_1 \Rightarrow$
$ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at + ac_1 \Rightarrow \frac{P}{a-bP} = k\,e^{a\,t}$, con $k = \pm e^{ac_1} \Rightarrow$
$P = k\,e^{at}\,(a - bP) \Rightarrow P = ak\,e^{at} - bk\,e^{at}\,P \Rightarrow P + bk\,e^{at}\,P = ak\,e^{at} \Rightarrow$
$P(1 + bk\,e^{at}) = ak\,e^{at} \Rightarrow P(t) = \frac{ak\,e^{at}}{1+bk\,e^{at}}$
Del enunciado se deduce que el tiempo se empezó a contar desde el año 2022, es decir, el año 2022 es nuestro tiempo inicial 0. Luego $P(0) = 1619530$ y
$\frac{P}{a-bP} = k\,e^{a\,t} \Rightarrow \frac{1619530}{10^{-2}-10^{-8}(1619530)} = ke^{10^{-2}(0)}$
$\Rightarrow k = \frac{1619530}{0.01-0.0161953} \approx -261412683.8$
Reemplzando los valores en $P(t) = \frac{ak\,e^{at}}{1+bk\,e^{at}}$ se tiene
$P(t) = \frac{2614126.838\,e^{0.01\,t}}{2.614126838\,e^{0.01\,t}-1}$ ❑
$ii)$ Tenemos que $2041 - 2022 = 19$
$P(19) = \frac{2614126.838\,e^{0.01\,(19)}}{2.614126838\,e^{0.01\,(19)}-1} = \frac{3161131.827}{2.161131827} = 1462720.5$ habitantes ❑

$iii)$ Observamos que el número de habitantes disminuye por lo que no podrá duplicarse el número de habitantes inicial. $\square$

$iv)$ $P(50) = \frac{2614126.838\, e^{0.01\,(50)}}{2.614126838\, e^{0.01\,(50)} - 1} = \frac{4309966.522}{3.309966522} = 1302117.86$ habitantes $\square$

2) Un circuito eléctrico tiene aplicada una fuerza electromotriz dada por $asen(100t)$, con a una constante positiva. Además una resistencia de 10 ohms, una capacitancia de 0.002 faradios y una inductancia de 0.1 henrios. Usando la transformada de Laplace determine la corriente en el circuito en el instante t, si $i = 0$ y $q = 0$ cuando $t = 0$.

(15 puntos)

Solución:

Sabemos que

$L\, q'' + R\, q' + \frac{1}{C}\, q = E$

El enunciado señala que $q(0) = 0,\ q'(0) = i(0) = 0.$ Además $L = 0.1,\ R = 10$ y $C = 0.002$

Usando la transformada de Laplace se tiene

$L\, q'' + R\, q' + \frac{1}{C}\, q = E \Rightarrow L\, \mathcal{L}[q''] + R\, \mathcal{L}[q'] + \frac{1}{C}\, \mathcal{L}[q] = \mathcal{L}[E] \Rightarrow$

$L(s^2\, Q(s) - sq(0) - q'(0)) + R(sQ(s) - q(0)) + \frac{1}{C} Q(s) = \mathcal{L}[E] \Rightarrow$

$L\, s^2\, Q(s) + R\, s\, Q(s) + \frac{1}{C} Q(s) = \mathcal{L}[E] \Rightarrow Q(s)(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}) = \mathcal{L}[E] \Rightarrow$

$Q(s) = \frac{\mathcal{L}[E]}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \Rightarrow Q(s) = \frac{\mathcal{L}[a\, sen(100t)]}{0.1s^2 + 10s + \frac{1}{0.002}} \Rightarrow Q(s) = \frac{100\, \frac{a}{s^2 + 10000}}{0.1s^2 + 10s + 500} \Rightarrow$

$Q(s) = 100\, a\, \frac{1}{(0.1s^2 + 10s + 500)(s^2 + 10000)} \Rightarrow$

$q(t) = 100a\left(-\frac{1}{125000} cos(100t) - \frac{1}{250000} sen(100t) + \frac{1}{125000} cos(50t) e^{-50t} + \frac{1}{62500} sen(50t) e^{-50t}\right)$

Luego, la corriente en cualquier instante t es

$i(t) = q'(t) = 100a\left(-\frac{1}{2500} cos(100t) + \frac{1}{1250} sen(100t) + \frac{1}{2500} cos(50t) e^{-50t} - \frac{3}{2500} sen(50t) e^{-50t}\right)$ $\square$

3) Sabiendo que $y_1 = x^2$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 sen(x)$, con $x > 0$, encuentre su solución general usando el método de variación de parámetros.

(15 puntos)

Solución:

La ecuación homogénea asociada es

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{2x}{x^2} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \Rightarrow^{x>0} y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$

La fórmula de Abel, con $p(x) = -\frac{2}{x}$, nos permite obtener $y_2(x)$, pues ya sabemos que $y_1(x) = x^2$

$y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx = x^2 \int \frac{e^{2\int \frac{1}{x}\,dx}}{(x^2)^2}\,dx = x^2 \int \frac{e^{2\,ln(x)}}{x^4}\,dx =$

$x^2 \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4}\,dx = x^2 \int \frac{1}{x^2}\,dx = x^2 \int x^{-2}\,dx = x^2\,(-x^{-1}) = -x$

$y_2(x) = -x$

Notemos que la edo no homogénea, en forma normal, es

$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x\,sen(x)$

Usemos el método de variación de parámetros para obtener la solución particular que tendrá la forma $y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$

Calculemos en primer lugar el Wronskiano

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -x \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -x^2 + 2x^2 = x^2 \neq 0$, pues $x > 0$

El sistema a resolver es

$\begin{bmatrix} x^2 & -x \\ 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x\,sen(x) \end{bmatrix}$

Usemos el método de Cramer

$c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -x \\ x\,sen(x) & -1 \end{vmatrix}}{x^2} = \dfrac{x^2\,sen(x)}{x^2} = sen(x) \Rightarrow$

$c_1(x) = -cos(x)$

$c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x\,sen(x) \end{vmatrix}}{x^2} = \dfrac{x^3\,sen(x)}{x^2} = x\,sen(x) \Rightarrow$

$c_2(x) = sen(x) - x\,cos(x)$

Finalmente, la solución general de la edo es

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) =$

$c_1\,x^2 - c_2\,x + cos(x)\,x^2 - (sen(x) - x\,cos(x))x =$

$c_1\,x^2 - c_2\,x - x^2\,cos(x) - x\,sen(x) + x^2\,cos(x) =$

$c_1\,x^2 - c_2\,x - x\,sen(x)$ $\square$

4) Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = g(t)$, con $g(t) = \begin{cases} t^2 & \text{, si } t < 1 \\ 0 & \text{, si } t \geq 1 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = 0$

(15 puntos)

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$y'' - 4y' + 4y = g(t) \Rightarrow \mathcal{L}[y''] - 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow$

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{-s^2e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + 2}{s^3}$

$\Rightarrow (s^2 - 4s + 4)Y(s) = \frac{-s^2e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + 2}{s^3} \Rightarrow$

$Y(s) = \frac{-s^2e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + 2}{s^3(s^2 - 4s + 4)} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s^2e^{-s} - 2se^{-s} - 2e^{-s} + 2}{s^3(s^2 - 4s + 4)}\right) \Rightarrow$

$y(t) = \frac{2t-3}{8}e^{2t} + \frac{2t^2+4t+3}{8} +$

$\left(\frac{-10(t-1)+9}{8}e^{2(t-1)} + \frac{-2(t-1)^2-8(t-1)-9}{8}\right)Heaviside(t-1)$ $\square$