

**PAUTA CERTAMEN N° 2 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS

FECHA : Mi 10/06/26

1) Un lago contiene $10^6 m^3$ de agua. Un río contaminado fluye hacia el lago a $2000 m^3/día$ con $0.05 kg/m^3$ de un tóxico. El lago desagua al mismo ritmo. Obtenga la cantidad de contaminantes $Q(t)$ en el lago si $Q(0) = 0$.

(15 puntos)

Solución:

Este es un problema de mezclas.

$$V_0 = 10^6, q_E = 2000, c_E = 0.05, q_S = 2000, c_S = \frac{Q(t)}{V_0} = \frac{Q(t)}{10^6}, Q(0) = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = q_E c_E - q_S c_S = 2000 \cdot 0.05 - 2000 \frac{Q(t)}{10^6} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 100 - 2 \times 10^{-3} Q \Rightarrow$$

$$Q' + 2 \times 10^{-3} Q = 100$$

Esta es una edo lineal con $p(t) = 2 \times 10^{-3}$, $q(t) = 100$

$$\mu = e^{\int 2 \times 10^{-3} dt} = e^{2 \times 10^{-3} t}$$

$$\int \mu q(t) dt = \int e^{2 \times 10^{-3} t} 100 dt = 100 \int e^{2 \times 10^{-3} t} dt = \frac{100}{2 \times 10^{-3}} e^{2 \times 10^{-3} t} = 50000 e^{2 \times 10^{-3} t}$$

$$Q(t) = e^{-2 \times 10^{-3} t} \left[50000 e^{2 \times 10^{-3} t} + c \right] = 50000 + c e^{-2 \times 10^{-3} t}$$

Ahora, como $Q(0) = 0$, se tiene que $50000 + c = 0$, es decir, $c = -50000$

Finalmente, $Q(t) = 50000 - 50000 e^{-2 \times 10^{-3} t}$

2) Si $y_1(t) = e^t$ es solución de $t y'' - (2t + 1) y' + (t + 1) y = 0$, con $t \neq 0$. Calcule la otra solución.

(15 puntos)

Solución:

Usemos la fórmula de Abel para obtener la segunda solución.

En primer lugar debemos dividir por t la ecuación diferencial

$$t y'' - (2t + 1) y' + (t + 1) y = 0 \Rightarrow y'' - \left(\frac{2t+1}{t}\right) y' + \left(\frac{t+1}{t}\right) y = 0$$

$$\text{Tenemos que : } p(t) = -\frac{2t+1}{t} \text{ y } q(t) = \frac{t+1}{t}$$

$$\text{La fórmula de Abel es: } y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{[y_1(t)]^2} dt$$

$$-\int p(t) dt = -\int -\frac{2t+1}{t} dt = \int \frac{2t+1}{t} dt = 2t + \ln|t|$$

$$e^{-\int p(t) dt} = e^{2t+\ln|t|} = e^{2t} e^{\ln|t|} = t e^{2t}$$

$$\int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{[y_1(t)]^2} dt = \int \frac{t e^{2t}}{[e^t]^2} dt = \int \frac{t e^{2t}}{e^{2t}} dt = \int t dt = \frac{1}{2} t^2$$

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{[y_1(t)]^2} dt = \frac{1}{2} t^2 e^t \quad \square$$

3) Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, con $x > 0$

(15 puntos)

Solución:

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

La ecuación diferencial no homogénea debemos resolverla usando el método de variación de parámetros.

$$\text{Calculemos } y_p(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

Tenemos que $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = x e^x$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + x e^x) - x e^{2x} = e^{2x} + x e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x} > 0$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + x e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{x e^{2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \ln(x)$$

La solución particular es $y_p(x) = -x e^x + \ln(x) x e^x$

Finalmente, la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - x e^x + \ln(x) x e^x \quad \square$$

4) Una planta de celulosa descarga agua residual de sus procesos de lavado a una laguna de estabilización abierta antes de ser devuelta a un río local. El agua sale de las calderas a una temperatura inicial de 70°C . La temperatura promedio del aire (medio ambiente) es de 20°C . Al cabo de 20 minutos de permanecer en la laguna, los ingenieros ambientales miden la temperatura del agua y registran 50°C . La normativa ambiental vigente estipula que el agua no puede ser vertida al río si supera los 28°C .

Encuentra la ecuación particular que modela la temperatura del agua en función del tiempo.

¿Cuánto tiempo en total debe permanecer el agua en la laguna para cumplir estrictamente con la normativa antes de su descarga?

(15 puntos)

Solución:

El modelo matemático que rige este fenómeno es $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb})$

T : temperatura del agua residual en grados celsius

t : tiempo en minutos

T_{amb} : temperatura ambiental que es igual a 20°C

Sabemos además que $T(0) = 70^{\circ}\text{C}$, $T(20) = 50^{\circ}\text{C}$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20) \Rightarrow \frac{dT}{T-20} = k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-20} = k \int dt \Rightarrow \ln|T - 20| = kt + c \Rightarrow$$

$$T - 20 = e^{kt} e^c \Rightarrow T(t) = e^{kt} e^c + 20$$

$$T(0) = 70 \Rightarrow \ln|70 - 20| = k(0) + c \Rightarrow c = \ln(50)$$

$$T(20) = 50 \Rightarrow \ln|50 - 20| = 20k + \ln(50) \Rightarrow 20k = \ln(30) - \ln(50) \Rightarrow$$

$$k = \frac{\ln(30) - \ln(50)}{20} \approx -0.025541281$$

$$T(t) = 50 e^{-0.025541281 t} + 20$$

Para responder la segunda pregunta debemos determinar t de modo que $T(t) = 28$

$$\ln|28 - 20| = \frac{\ln(30) - \ln(50)}{20} t + \ln(50) \Rightarrow \frac{\ln(30) - \ln(50)}{20} t = \ln(8) - \ln(50) \Rightarrow$$

$$t = \frac{20 \ln(8) - 20 \ln(50)}{\ln(30) - \ln(50)} \approx 71.74978617 \text{ minutos}$$

El agua en la laguna debe permanecer 1 hora 12 minutos, aproximadamente. $\square$