

**PAUTA CERTAMEN N° 1 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 11/09/25**

1) Resuelva las E.D.O. siguientes:

a) $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} y^3$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy}{y^2+1}$

c) $x^2 - y^2 + 2xy y' = 0$

(30 puntos)

Solución:

a) $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} y^3$

Es una ecuación de Bernoulli, con $p(x) = -1$, $q(x) = e^{2x}$ y $n = 3$

Consideremos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$. Esta sustitución transforma la edo de Bernoulli en la edo lineal

$$v' + (1 - n)p(x) v = (1 - n)q(x)$$

es decir,

$$v' + 2v = -2e^{2x}$$

$$v(x) = e^{-\int 2 dx} \left[\int -2 e^{2x} e^{\int 2 dx} dx + c \right] \Rightarrow v(x) = e^{-2x} \left[-2 \int e^{2x} e^{2x} dx + c \right] \Rightarrow$$

$$v(x) = e^{-2x} \left[-2 \int e^{4x} dx + c \right] \Rightarrow v(x) = e^{-2x} \left[-\frac{1}{2} e^{4x} dx + c \right] \Rightarrow$$

$$v(x) = -\frac{1}{2} e^{2x} + c e^{-2x}$$

Luego, de $v = y^{-2}$ se tiene que $y^2 = \frac{1}{v}$, es decir, $y = \frac{1}{\pm\sqrt{v}} = \frac{1}{\pm\sqrt{-\frac{1}{2} e^{2x} + c e^{-2x}}}$

Finalmente, $y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{-\frac{1}{2} e^{2x} + c e^{-2x}}}$ y $y = 0$ también es solución. $\square$

$$b) \frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy}{y^2+1}$$

Es una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy}{y^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(2+y)}{y^2+1} \Rightarrow \frac{y^2+1}{y+2} dy = x dx \Rightarrow \int \frac{y^2+1}{y+2} dy = \int x dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} y^2 - 2y + 5 \ln|y+2| = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Finalmente, la solución de la edo $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy}{y^2+1}$, dada en forma implícita, es

$$\frac{1}{2} y^2 - 2y + 5 \ln|y+2| = \frac{1}{2} x^2 + c \quad \square$$

$$c) x^2 - y^2 + 2xy y' = 0$$

Es una edo de coeficientes homogéneos, por lo que debemos considerar la sustitución $v = \frac{y}{x}$ o $y = vx$

Luego, $y' = v'x + v$

$$x^2 - y^2 + 2xy y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow v'x + v = \frac{(vx)^2 - x^2}{2x(vx)} \Rightarrow$$

$$v'x + v = \frac{v^2 x^2 - x^2}{2x^2 v} \Rightarrow v'x + v = \frac{x^2(v^2 - 1)}{2x^2 v} \Rightarrow v'x + v = \frac{v^2 - 1}{2v} \Rightarrow$$

$$v'x = \frac{v^2 - 1}{2v} - v \Rightarrow v'x = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} x = \frac{-v^2 - 1}{2v} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} x = -\frac{v^2 + 1}{2v} \Rightarrow \frac{2v}{v^2 + 1} dv = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2v}{v^2 + 1} dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|v^2 + 1| = -\ln|x| + c \Rightarrow \ln|v^2 + 1| = \ln|x^{-1}| + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln|v^2 + 1|} = e^{\ln|x^{-1}| + c} \Rightarrow v^2 + 1 = e^{\ln|x^{-1}|} e^c \Rightarrow v^2 + 1 = k x^{-1}$$

Volvamos a la variable original, recordando que $v = \frac{y}{x}$

$$v^2 + 1 = k x^{-1} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = k \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = k \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^2} = k \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow y^2 = x^2 \left(k \frac{1}{x} - 1\right) \Rightarrow y^2 = k x - x^2 \Rightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{k x - x^2}$$

Finalmente, la solución de la edo $x^2 - y^2 + 2xy y' = 0$ es

$$y = \pm \sqrt{k x - x^2} \quad \square$$

2) Resuelva el P.V.I. siguiente:

$$(3x^2 + y^3 e^y) dx + (3x y^2 e^y + x y^3 e^y + 3y^2) dy = 0, \quad y(2) = 0$$

(15 puntos)

Solución:

Veamos si la edo es exacta.

$$M(x, y) = 3x^2 + y^3 e^y \Rightarrow M_y = 3y^2 e^y + y^3 e^y$$

$$N(x, y) = 3x y^2 e^y + x y^3 e^y + 3y^2 \Rightarrow N_x = 3y^2 e^y + y^3 e^y$$

Observamos que $M_y = N_x$, es decir, la edo es exacta.

Usemos $F_x = M$ para integrar :

$$F_x = M \Rightarrow \int F_x dx = \int M dx \Rightarrow F(x, y) = \int (3x^2 + y^3 e^y) dx \Rightarrow$$

$$F(x, y) = x^3 + y^3 e^y x + g(y)$$

Usemos ahora $F_y = N$ para derivar :

$$F_y = N \Rightarrow 3y^2 e^y x + y^3 e^y x + g'(y) = 3x y^2 e^y + x y^3 e^y + 3y^2 \Rightarrow$$

$$g'(y) = 3y^2 \Rightarrow g(y) = y^3$$

$$\text{Luego, } F(x, y) = x^3 + y^3 e^y x + y^3$$

La solución de la edo es: $x^3 + y^3 e^y x + y^3 = c$

Consideremos la condición inicial $y(2) = 0$ para calcular la constante c

$$y(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + 0^3 e^0 2 + 0^3 = c \Rightarrow c = 8$$

Finalmente, la solución del P.V.I. es : $x^3 + y^3 e^y x + y^3 = 8$ $\square$

3) Hallar una solución particular que satisfaga la condición dada:

$$(x - y) dx + (y - x - 1) dy = 0; \text{ cuando } x = 0, y = 2$$

(15 puntos)

Solución:

Es una edo de coeficientes lineales, en donde podemos hacer $z = x - y$

$$z = x - y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 1$$

$$(x - y) dx + (y - x - 1) dy = 0 \Rightarrow (x - y) dx - (x - y + 1) dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + 1 = \frac{z}{z+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{z+1} - 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-z-1}{z+1} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{z+1} \Rightarrow (z+1) dz = - dx \Rightarrow \int (z+1) dz = - \int dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} z^2 + z = -x + c \Rightarrow \frac{1}{2} (x - y)^2 + x - y = -x + c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (x - y)^2 + 2x - y = c$$

Consideremos la condición inicial $y(0) = 2$:

$$\frac{1}{2} (0 - 2)^2 + 2 \cdot (0) - 2 = c \Rightarrow c = 2 - 2 \Rightarrow c = 0$$

Finalmente, la solución del P.V.I. es: $\frac{1}{2} (x - y)^2 + 2x - y = 0$ $\square$