UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Vi 13/09/24**

1) Resuelva las E.D.O. siguientes:

$a)\ \ t\,\frac{dv}{dt}+v=0$

$b)\ \frac{dy}{dx}-y=e^x\,y^2$

$c)\ y-6x^2y^3+(2x-8x^3y^2)\,y'=0$

(30 puntos)

Solución:
$a)$ Para $v\neq 0$
$t\,\frac{dv}{dt}+v=0\Rightarrow t\,\frac{dv}{dt}=-v\Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{dt}{t}\Rightarrow ln|\,v\,|=-ln|\,t\,|+c\Rightarrow$
$e^{ln|\,v\,|}=e^{-ln|\,t\,|+c}\Rightarrow v(t)=k\,t^{-1}$, con $k=e^c>0$
Por otro lado, observamos que $v=0$ es también solución de la edo, pues
$t\,(0)+0=0$ $\square$

$b)\ \frac{dy}{dx}-y=e^x\,y^2$
La ecuación diferencial es de Bernoulli con $p(x)=-1$, $q(x)=e^x$ y $n=2$
Debemos considerar la sustitución $v=y^{1-2}=y^{-1}$
Con la sustitución anterior la ecuación diferencial original se transforma en una lineal con $p_1(x)=(1-n)p(x)=-(-1)=1$ y $q_1(x)=(1-n)q(x)=-e^x$
$v(x)=e^{-\int p_1(x)\,dx}\Big[\int e^{\int p_1(x)\,dx}\,q_1(x)\,dx+c\Big]=$
$e^{-\int dx}\Big[-\int e^{\int dx}\,e^x\ dx+c\Big]=e^{-x}\Big[-\int e^x\,e^x\ dx+c\Big]=$
$e^{-x}\Big[-\int e^{2x}\ dx+c\Big]=e^{-x}\Big[-\frac{1}{2}e^{2x}+c\Big]=-\frac{1}{2}e^x+c\,e^{-x}$
Las soluciones de la edo original son:

$y(x) = \frac{1}{v} = \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{x} + c\, e^{-x}}$, con $c \in \mathbb{R}$

Notemos que $y(x) = 0$ también es solución de la edo, pues $0 - 0 = e^{x}(0)^2$. $\square$

$c)$ $y - 6x^2y^3 + (2x - 8x^3y^2)\, y' = 0 \Rightarrow y - 6x^2y^3 + (2x - 8x^3y^2)\, \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$
$(y - 6x^2y^3)\, dx + (2x - 8x^3y^2)\, dy = 0 \Rightarrow$
$M(x,y) = y - 6x^2y^3 \Rightarrow M_y = 1 - 18x^2y^2$
$N(x,y) = 2x - 8x^3y^2 \Rightarrow N_x = 2 - 24x^2y^2$

Observamos que la ecuación diferencial no es exacta. Veamos si es posible convertirla en una exacta.

Tenemos que

$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2 - 24x^2y^2 - 1 + 18x^2y^2}{y - 6x^2y^3} = \frac{1 - 6x^2y^2}{y - 6x^2y^3} = \frac{1 - 6x^2y^2}{y(1 - 6x^2y^2)} = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$

$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{y} \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{y} \Rightarrow ln|\,\mu\,| = ln|\,y\,| \Rightarrow \mu = y$

Multipliquemos la edo original por el factor integrante $\mu(y) = y$

$(y^2 - 6x^2y^4)\, dx + (2xy - 8x^3y^3)\, dy = 0$

Notemos que

$M_1(x,y) = y^2 - 6x^2y^4 \;\Rightarrow M_{1y} = 2y - 24x^2y^3$
$N_1(x,y) = 2xy - 8x^3y^3 \Rightarrow N_{1x} = 2y - 24x^2y^3$

Recordemos que $F_x = M_1$ y $F_y = N_1$

Usemos $F_x = M_1$ para integrar

$\int F_x\, dx = \int M_1\, dx \Rightarrow F(x,y) = \int (y^2 - 6x^2y^4)\, dx \Rightarrow$
$F(x,y) = y^2x - 2x^3y^4 + g(y)$

Usemos $F_y = N_1$ para derivar

$F_y = N_1 \Rightarrow 2yx - 8x^3y^3 + g'(y) = 2xy - 8x^3y^3 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = 0$

Luego $F(x,y) = y^2x - 2x^3y^4$

Las soluciones de la edo son $y^2x - 2x^3y^4 = c$, con c una constante real.

Notemos que $y(x) = 0$ también es solución de la edo, pues
$0 - 6x^2 0^3 + (2x - 8x^3 0^2)\, 0 = 0$ $\square$

2) Resuelva el P.V.I. siguiente: $\frac{du}{dt} = \frac{2t+1}{2(u-1)}$, $u(0) = -1$

(15 puntos)

Solución:

Si $u \neq 1$, entonces

$\frac{du}{dt} = \frac{2t+1}{2(u-1)} \Rightarrow (u-1)\, du = \frac{1}{2}\,(2t+1)\, dt \Rightarrow \int (u-1)\, du = \frac{1}{2}\int (2t+1)\, dt \Rightarrow$
$\frac{1}{2}u^2 - u = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + c$

Consideremos la condición inicial $u(0) = -1$

$\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(0) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

la solución del P.V.I. es $\frac{1}{2}u^2 - u = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$

Observamos que $u = 1$ no es solución de la edo $(u-1)\, du = \frac{1}{2}\,(2t+1)\, dt$ $\square$

3) Hallar una solución particular que satisfaga la condición dada:
$(x+2y-1)dx+(x+2y+4)dy=0;$ cuando $x=1,\ y=2$

(15 puntos)

Solución:

La ecuación diferencial es de coeficientes lineales.

Sea $z=x+2y$

$z=x+2y \Rightarrow \frac{dz}{dx}=1+2\,\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$

$(x+2y-1)dx+(x+2y+4)dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-x-2y}{x+2y+4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-(x+2y)}{x+2y+4} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=\frac{1-z}{z+4} \Rightarrow \frac{dz}{dx}-1=\frac{2-2z}{z+4} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2-2z}{z+4}+1 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2-2z+z+4}{z+4} \Rightarrow$

$\frac{dz}{dx}=\frac{6-z}{z+4} \Rightarrow \frac{z+4}{6-z}dz=dx \Rightarrow \int \frac{z+4}{6-z}dz=\int dx \Rightarrow -10\,ln|\,z-6|-z=x+c \Rightarrow$

$-10\,ln|\,x+2y-6|-x-2y=x+c \Rightarrow -10\,ln|\,x+2y-6|-2x-2y=c$

Ahora, cuando $x=1,\ y=2$

$-10\,ln|\,1+2(2)-6|-2(1)-2(2)=c \Rightarrow c=-10\,ln|\,-1\,|-2-4 \Rightarrow c=-6$

La solución del P.V.I. es $-10\,ln|\,x+2y-6|-2x-2y=-6$ $\square$