

**PAUTA CERTAMEN N° 1 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA AMBIENTAL**

NOMBRE : _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Mi 15/04/26**

1) Resuelva las E.D.O. siguientes:

a) $y' = -\frac{3x^2+2xy^3}{3x^2y^2}$

Solución:

En este caso tenemos que $M(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ y $N(x, y) = 3x^2y^2$

$$M_y = 6xy^2$$

$$N_x = 6xy^2$$

De lo anterior, observamos que la ecuación diferencial es exacta.

Integremos $F_y = N$

$$\int F_y dy = \int N dy \Rightarrow F(x, y) = \int 3x^2y^2 dy \Rightarrow F(x, y) = x^2y^3 + f(x)$$

Usemos ahora la igualdad $F_x = M$

$$F_x = 2xy^3 + f'(x) = M = 3x^2 + 2xy^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 dx = x^3$$

Luego, $F(x, y) = x^2y^3 + x^3$

Finalmente, la solución de la edo es $F(x, y) = c$, es decir, $x^2y^3 + x^3 = c$ $\square$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y-y}{y+1}$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y-y}{y+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2-1)}{y+1} \Rightarrow \frac{y+1}{y} dy = (x^2-1) dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{y+1}{y} dy = \int (x^2-1) dx \Rightarrow \int dy + \int \frac{1}{y} dy = \int (x^2-1) dx \Rightarrow$$

$$y + \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

La solución de la edo está dada en forma implícita por

$$y + \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 - x + c \quad \square$$

(30 puntos)

2) Resuelva el P.V.I. siguiente: $\frac{du}{dt} = \frac{u}{2t} + \frac{t^2}{u^2}$, $u(1) = 1$

(15 puntos)

Solución:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{2t} + \frac{t^2}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{u^3+2t^3}{2tu^2}$$

Observamos que es una edo de coeficientes homogéneos

Sea $v = \frac{u}{t}$

$$v = \frac{u}{t} \Rightarrow u = vt \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}t + v$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^3+2t^3}{2tu^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}t + v = \frac{(vt)^3+2t^3}{2t(vt)^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}t + v = \frac{v^3t^3+2t^3}{2t^3v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}t + v = \frac{t^3(v^3+2)}{2t^3v^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt}t + v = \frac{v^3+2}{2v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}t = \frac{v^3+2}{2v^2} - v \Rightarrow \frac{dv}{dt}t = \frac{v^3+2-2v^3}{2v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}t = \frac{2-v^3}{2v^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2v^2}{2-v^3}dv = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{2v^2}{2-v^3}dv = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow -\frac{2}{3} \ln|2-v^3| = \ln|t| + c \Rightarrow$$

$$\ln|2-v^3| = -\frac{3}{2}\ln|t| - \frac{3}{2}c \Rightarrow \ln|2-v^3| = \ln|t^{-3/2}| + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2}c$$

$$2-v^3 = \pm k t^{-3/2}, \text{ con } k = e^{c_2} > 0$$

Volvamos a la variable original

$$2 - \left(\frac{u}{t}\right)^3 = \pm k t^{-3/2}$$

Usemos ahora la condición inicial $u(1) = 1$

$$2 - 1^3 = \pm k (1)^{-3/2} \Rightarrow 1 = k \text{ (se usa el signo positivo, pues } k > 0)$$

Finalmente, $2 - \frac{u^3}{t^3} = t^{-3/2}$

Observación: La edo original también es una ecuación de Bernoulli

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{2t} + \frac{t^2}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{1}{2t}u = t^2 u^{-2} \quad \square$$

3) Hallar una solución particular que satisfaga la condición dada:

$$(x+y+1)dx + (x+y-1)dy = 0; \text{ cuando } x=2, y=1$$

(15 puntos)

Solución:

Sea $v = x + y$

$$v = x + y \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

$$(x+y+1)dx + (x+y-1)dy = 0 \Rightarrow (x+y+1)dx = (1-x-y)dy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{1-x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)+1}{1-(x+y)} \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{1-v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{1-v} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v+1+1-v}{1-v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{1-v} \Rightarrow \frac{1-v}{2}dv = dx \Rightarrow \int \frac{1-v}{2}dv = \int dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int dv - \frac{1}{2} \int v dv = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}v^2 = x + c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{4}(x+y)^2 = x + c$$

Usemos la condición inicial $y(2) = 1$

$$\frac{1}{2}(2+1) - \frac{1}{4}(2+1)^2 = 2 + c \Rightarrow c = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} - 2 \Rightarrow c = -\frac{11}{4}$$

Finalmente, la solución particular es

$$\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{4}(x+y)^2 = x - \frac{11}{4} \quad \square$$