EJERCICIOS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1 Resuelva el siguiente PVI:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 4$$

$$y'(2) = 3$$

$$y(2) = 4$$

<u>Solución:</u>

$y' = \frac{dy}{dx}$, de modo que $y' = \int (12x - 4)\,dx$

Por tanto, $y'(x) = 6x^2 - 4x + c_1$. Pero $y'(2) = 3$, de donde

$$3 = 6(2)^2 - 4(2) + c_1 \Rightarrow c_1 = -13$$

Así, $y'(x) = 6x^2 - 4x - 13$.
Finalmente

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int (6x^2 - 4x - 13)\,dx = 2x^3 - 2x^2 - 13x + c_2$$

Haciendo uso de la condición inicial $y(2) = 4,$ se tiene:

$$y(2) = 4 = 2(2)^3 - 2(2)^2 - 13(2) + c_2 \Rightarrow c_2 = 22$$

y

$$y(x) = 2x^3 - 2x^2 - 13x + 22♥$$

2 Resuelva la EDO siguiente: $\frac{dy}{dx} = sen(x + y)$

<u>Solución:</u>

La EDO se puede reescribir como:

$$dy = sen(x + y)\,dx$$

Si hacemos $x + y = z,$ entonces $dx + dy = dz.$ De donde, $dy = dz - dx.$
Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$dz - dx = sen(z)\,dx \Rightarrow dz = (1 + sen(z))\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{(1+sen(z))} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{(1+sen(z))} = \int dx \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{tan(\frac{z}{2})+1} = x + c \ \Rightarrow \frac{-2}{tan(\frac{x+y}{2})+1} = x + c \ \heartsuit$$

3 Resuelva:

$$(x + y + 1)\, dx + (6x + 10y + 14)\, dy = 0$$

<u>Solución:</u>

La ecuación diferencial dada es una ecuación de coeficientes lineales. En este caso se tiene que : $a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ b_1 = 1,\ b_2 = 10,\ c_1 = 1,\ c_2 = 14.$
Luego : $a_1 b_2 = 1\,(10) \neq a_2\, b_1 = 6\,(1)$. Hacemos uso de las transformaciones siguientes:

$$x = u + h$$
$$y = v + k$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$(u + h + v + k + 1)\, du + (6u + 6h + 10v + 10k + 14)\, dv = 0 \ \Rightarrow$$

$$(u + v + h + k + 1)\, du + (6u + 10v + 6h + 10k + 14)\, dv = 0$$

Al resolver el sistema:

$$h + k + 1 = 0$$
$$6h + 10k + 14 = 0$$

obtenemos: $h = 1,\ k = \ -2.$

Ahora, resolvemos

$$(u + v)\, du + (6u + 10v)\, dv = 0$$

Usando la sustitución $u = a\, v$:

$$(a\, v + v)\,(a\, dv + v\, da) + (6a\, v + 10v)\, dv = 0 \ \Rightarrow$$

$$(a + 1)\, v\,(a\, dv + \ v\, da) \ + (6a + 10)\, v\, dv = 0 \ \Rightarrow$$

$$(a + 1)\,(a\, dv + \ v\, da) + (6a + 10)\, dv = 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{(a+1)\, da}{(a+5)(a+2)} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} + \left[\frac{4}{3(a+5)} - \frac{1}{3(a+2)}\right] dv = 0 \;\Rightarrow$$

$$3\,ln(v) + 4\,ln(a+5) - ln(a+2) = ln\,c \;\Rightarrow$$

$$v^3\,(a+5)^4 = c\,(a+2)$$

Reemplazando $a = \frac{u}{v}$:

$$(u+5v)^4 = c\,(u+2v)$$

Finalmente,

$$u = x - h = x - 1$$
$$v = y - k = y + 2$$

y

$$(x+5y+9)^4 = c\,(x+2y+3)\; ♥$$

4 Resuelva: $\quad (x + \sqrt{y^2 - xy}\,)\,dy - y\,dx \;= 0$

<u>Solución:</u>

La variable que posee el diferencial de más simple coeficiente es el que acompaña a dx, por tanto consideramos la sustitución $x = v\,y$. Luego $dx = v\,dy + y\,dv$ y además

$$(v\,y + \sqrt{y^2 - v\,y^2}\,)\,dy - y\,(v\,dy + y\,dv) = 0 \Rightarrow$$

$$(v\,y \;+ y\,\sqrt{1-v}\,)\,dy - y\,(v\,dy + y\,dv) = 0 \;\Rightarrow$$

$$y\,(v \;+ \sqrt{1-v}\,)\,dy - y\,(v\,dy + y\,dv) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(v \;+ \sqrt{1-v}\,)\,dy - (v\,dy + y\,dv) = 0 \;\Rightarrow$$

$$v\,dy + \sqrt{1-v}\;dy - v\,dy - y\,dv = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-v}\;dy - y\,dv = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} - \frac{dv}{\sqrt{1-v}} \;= 0$$

que es una ecuación diferencial de variables separadas.

Integrando:

$$ln|\,y\,| + 2\sqrt{1-v}\;\; = c_1$$

Aplicando la exponencial:

$$y\, e^{2\sqrt{1-v}} = e^{c_1}$$

Reemplazando v por $\frac{x}{y}$:

$$y\, e^{2\sqrt{\frac{y-x}{y}}} = c$$

¿Qué sucede cuando $y = 0$? ♥

5 Muestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$$

es reducible a una ecuación de coeficientes homogéneos.

Solución:

Si consideramos la sustitución

$$x = u + h$$
$$y = v + k$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial, teniendo presente que $dx = du$ y $dy = dv$,

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+h)+a_2(v+k)+a_3}{b_1(u+h)+b_2(v+k)+b_3}\right) = f\left(\frac{a_1u+a_1h+a_2v+a_2k+a_3}{b_1u+b_1h+b_2v+b_2k+b_3}\right) =$$

$$f\left(\frac{a_1u+a_2v+a_1h+a_2k+a_3}{b_1u+b_2v+b_1h+b_2k+b_3}\right)$$

Ahora, si se eligen h y k de modo que

$$a_1h + a_2k + a_3 = 0$$

y

$$b_1h + b_2k + b_3 = 0$$

la ecuación nos queda:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+a_2v}{b_1u+b_2v}\right)$$

que es una ecuación de coeficientes homogéneos, que se resuelve por uno de los dos métodos:
$a)$ Sustituya $v = t\,u$. La ecuación resultante es separable en t y u; se resuelve y se reemplaza t por $\frac{v}{u}$.
$b)$ Sustituya $u = t\,v$. La ecuación resultante es separable en t y v; se resuelve y se reemplaza t por $\frac{u}{v}$.

Ejercicios: Resuelva:

$a)$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+4y}{4x-4}\right)^2 \qquad (R:\ x = 1 + c\,e^{(4x-4)/((x-4y-2)}\,)$

$b)$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+y+1}{x+y}\right)^2$

$(R:\ 6(y-x) + c = ln(|2x+2y+1|)\,(x^2+2xy+y^2+x+y+1)^4\,)$ ♥

6 Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\theta^2 r\,\frac{dr}{d\theta} = 1 + \theta^2$$

Solución:

Separando variables:

$$r\,dr = \frac{1+\theta^2}{\theta^2}\,d\theta \Rightarrow \int r\,dr = \int \frac{1+\theta^2}{\theta^2}\,d\theta \Rightarrow$$

$$\int r\,dr = \int \frac{1}{\theta^2}\,d\theta + \int d\theta \Rightarrow \frac{r^2}{2} = -\frac{1}{\theta} + \theta + c_1 \Rightarrow$$

$$r^2 = 2\,\frac{(-1+\theta^2+\theta\,c)}{\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{(-2+2\theta^2+2\,\theta\,c_1)}{\theta} \Rightarrow$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{(-2+2\theta^2+2\,c_1\theta)}{\theta}} \Rightarrow r = \pm\frac{\sqrt{\theta(-2+2\theta^2+c\,\theta)}}{\theta}$$ ♥

7 Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de m_0 gramos. Al ser observado después de 24 horas, ha experimentado una reducción de masa del 10%. Encuentre una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. Calcule también el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original.

Solución:

Sea $m(t)$ la masa del material al tiempo t. Ya que la velocidad de cambio de m $(m'(t))$ es proporcional a m misma, se tiene:

$$m'(t) = k\, m(t)\,,$$

donde k es un factor de proporcionalidad constante.
La ecuación anterior puede resolverse, ya sea como una ecuación lineal o por separación de variables, y su solución general es:

$$m(t) = c\, e^{k\,t}$$

Si el origen de la escala del tiempo se elige como el instante en el que la masa del material es m_0, entonces la condición inicial es $m(t_0) = m(0) = m_0$. Por lo tanto,

$$m_0 = c\, e^{k\,0} = c$$

y

$$m(t) = m_0\, e^{k\,t}$$

Si se conoce k , entonces la ecuación da una fórmula para la masa m presente a cualquier tiempo. Si no se conoce k por anticipado, se necesita una segunda observación para determinarla. En el problema dado, $m(24) = 9m_0/10$. Así

$$\tfrac{9}{10}\, m_0 = m_0\, e^{24\,k} \;\Rightarrow e^{24\,k} = \tfrac{9}{10} \;\Rightarrow 24\,k = ln(\tfrac{9}{10}) \;\Rightarrow$$

$$k = \tfrac{1}{24}\, ln(\tfrac{9}{10}) \;\approx\; -\,0.00439$$

Por lo tanto,

$$m(t) = m_0\, e^{-0.00439\,t}$$

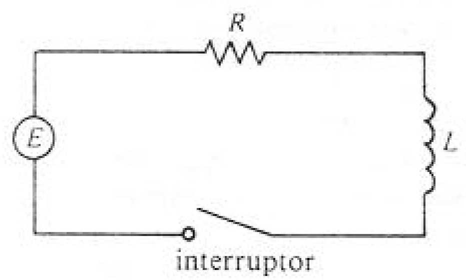
El periodo de tiempo durante el cual se reduce la masa a la mitad de su valor original es conocido como la $vida\, media$ del material. Si t_1 es el tiempo para el cual $m(t)$ es igual a $m_0/2$, entonces:

$$\tfrac{m_0}{2} = m_0\, e^{k\,t_1} \;\Rightarrow t_1 = \,-\,\tfrac{1}{k}\, ln(2).$$

Usando el valor de k obtenido, se tiene:

$$t_1 = \frac{24\, ln(2)}{ln(10/9)} \;\approx 158\,(horas). \;\heartsuit$$

8 El circuito eléctrico sencillo mostrado en la siguiente figura



contiene una fuerza electromotriz (normalmente una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ voltios (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito contiene también un resistor de una resistencia de R ohmios (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrios (H).
La ley de Ohm establece que la caída de voltaje debida al resistor es $R\,I$. La caída de voltaje debida al inductor es $L\,(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff expresa que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje $E(t)$ suministrado. De modo que se tiene

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = E(t)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden. La solución proporciona la corriente I en el tiempo t.

Suponga que en el circuito la resistencia es de $12\,\Omega$ y la inductancia es de $4H$. Si la batería proporciona un voltaje constante de $60\,V$ y el interruptor se cierra cuando $t=0$ de manera que la corriente empieza con el valor $I(0)=0$, encontrar

$(a)\,I(t)$

(b) la corriente al cabo de 1 segundo

(c) el valor límite de la corriente.

Solución:

(a) Si se sustituye $L=4,\ R=12,\ E(t)=60$ en la ecuación diferencial anterior se obtiene el problema de valor inicial

$$4\,\frac{dI}{dt} + 12\,I = 60$$

$$I(0)=0$$

ó

$$\frac{dI}{dt} + 3\,I = 15$$

$$I(0) = 0$$

Observamos que la ecuación diferencial tiene la forma $\frac{dI}{dt} + p(t)\,I = q(t)$, cuya solución general es

$$I(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left(\int e^{\int p(t)\,dt}\,q(t)\,dt\ + c\right)$$

Ahora, dado que $p(t) = 3$ y $q(t) = 15$, se tiene

$$I(t) = e^{-3t}\,(15\int e^{3t}\,dt\ + c) = e^{-3t}\,(15\,\tfrac{1}{3}\,e^{3t}\ + c) = 5 + c\,e^{-3t}$$

es decir,

$$I(t) = 5 + c\,e^{-3t}$$

Pero, $I(0) = 0$, luego $I(0) = 5 + c\,e^{-3(0)} = 5 + c = 0$, así $c = -5$, con lo que

$$I(t) = 5 - 5\,e^{-3t}\ = 5\,(1 - e^{-3t})$$

(b) Al cabo de 1 segundo la corriente es:

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.751\,A$$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim\limits_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5.$♥

Ejercicios.

$1)$ Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo anterior, pero en vez de la batería se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60\,sen(30t)\,V$. Determinar $I(t)$.
$(Respuesta:\ I(t) = \frac{5}{101}\,(sen(30t) - 10\,cos(30t)) + \frac{50}{101}\,e^{-3t}\,)$

$2)$ Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian las *curvas de aprendizaje*. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de una persona que aprende una habilidad en función del tiempo de adiestramiento t. La derivada $\frac{dP}{dt}$ representa la velocidad a la que mejora el desempeño. Si M es el máximo nivel de desempeño que es capaz el aprendiz, resulta razonable suponer que $\frac{dP}{dt}$ es proporcional a $M - P(t)$ (Al principio el aprendizaje es rápido. Luego, cuando aumenta el desempeño y tiende a su valor máximo, la velocidad de aprendizaje disminuye). De esta manera,

$$\frac{dP}{dt} = k\,(M - P(t))$$

donde k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial y grafique la curva de aprendizaje.
$(Respuesta:\ P(t) = M + c\,e^{-k\,t}\,)$

$3)$ Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si $s(t)$ representa la distancia recorrida en la caída al cabo de t segundos, entonces la velocidad es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza que actúa sobre el objeto dirigida hacia abajo es $mg - c\,v$, en donde c es una constante positiva, y de la segunda ley de Newton resulta:

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - c\,v$$

(a) Resuelva esta ecuación diferencial, para determinar la velocidad v en el tiempo t.

(b) ¿Cuál es la velocidad límite ?

(c) Calcule la distancia que el objeto ha recorrido en caída al cabo de t segundos.

$(Respuestas:$
$(a)\ (mg/c)(1 - e^{-ct/m})$
$(b)\ mg/c$
$(c)\ (mg/c)\left[t + (m/c)\,e^{-ct/m}\,\right] - m^2g/c^2\,)$