UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

LISTADO N° 1 DE EJERCICIOS
ECUACIONES DIFERENCIALES

1 Compruebe que la función indicada sea solución de la ecuación diferencial dada. Los símbolos c_1 y c_2 representan constantes reales.

$a)\ y' = 25 + y^2 \qquad ;\ y(x) = 5\,tg(5x)$

$b)\ \frac{dP}{dt} = P(a - bP) \qquad ;\ P(t) = \frac{a\,c_1\,e^{at}}{1+\ b\ c_1 e^{at}}$, con a y b constantes.

$c)\ \frac{dq}{dt} = (2-q)(1-q) \qquad ;\ ln\left(\frac{2-q}{1-q}\right) = t$

$d)\ x^3\,\frac{d^3y}{dx^3} + 2\,x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\,\frac{dy}{dx} + y = 12\,x^2 \qquad ;\ y(x) = c_1 x + c_2\,x\,ln(x) + 4x^2,\ x > 0$

$e)\ (5 + x - y)\,dx + (3 - x - y)\,dy = 0 \qquad ;$

$\frac{1}{2} ln\left(- \frac{(1+x)^2 + 2(4-y)(1+x) - (4-y)^2}{(1+x)^2} \right) + ln(1+x) + c_1 = 0$

2 Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$a)\ \frac{dr}{dt} = \frac{2t\,sen(r/t) + 3r\,cos(r/t)}{3t\,cos(r/t)}$

$b)\ (x^2 + 3y^2)\,dx = 2xy\,dy$

$c)\ (-t + 2y(t) - 7)\,dy - 2t\,dt = (4 - 2y(t))\,dt$

$d)\ v''(t) = 3t^4$

$e)\ \frac{2}{x^2}\ \frac{dy}{dx} = y^2$

$f)\ 3y^2 - (x^4 + 2xy)\,y' = 0$

$g)\ x\,y' + y + 2x = e^x$

$h)\ x(x+1)\,y' = x(x+1)^2\,e^{-x^2} - y$

3 Obtenga, si existe, la solución del PVI

$a)$ $y''(x) = x + 1\,,\; y(1) = -1\,, y'(1) = 2$

$b)$ $\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-3x}\,,\; y(0) = 3$

$c)$ $(x + 2y - 1)\,dy - (2y + x - 3)\,dx = 0\,,\; y(4) = -1$

$d)$ $dy + y\,sec(x)\,dx = x\,cos(x)\,dx\;,\; y(0) = 2$

$e)$ $\frac{dx}{dy} = y\,e^{x}\,e^{y^2}\,,\; y(1) = 1$

$f)$ $e^{s}\,dt + e^{t}\,ds = 0\,,\; t(0) = 0$

4 Resuelva los siguientes problemas de aplicación

$a)$ Un estanque está parcialmente lleno con 900 litros de agua en los cuales se disuelven 9 kilos de sal. Una salmuera que contiene un kilo de sal disuelta en 4 litros, se bombea al tanque con una rapidez de 22.7 litros por minuto, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.

$i)$ Obtenga la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante.
$ii)$ ¿Cuánta sal está presente después de media hora?
$iii)$ Reponda las mismas preguntas anteriores si la mezcla sale a una tasa

1) de 10 litros por minuto?
2) de 30 litros por minuto?

$b)$ Al apagar un motor su temperatura es de $98^\circ\,C$ y el medio en que se encuentra se conserva a $21^\circ C$. Si después de 10 minutos el motor se ha enfriado a $88^\circ C$, encuentre:
$i)$ la temperatura del motor como función del tiempo.
$ii)$ El instante en el cual su temperatura es de $35^\circ C$

$c)$ Se ha observado que el yodo radiactivo Yodo-131 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad de Yodo-131 presente. Su vida media es de 8.02 días. ¿Qué porcentaje desaparecerá en 15 días?. ¿Cuánto tiempo habrá que esperar para que desaparezca completamente?

$d)$ Considere un depósito que tiene un volumen inicial V_0 de una mezcla de soluto y solvente. Hay un flujo tanto de entrada como de salida y se quiere calcular la cantidad de soluto $S(t)$ que hay en el depósito en cualquier instante de tiempo t, en función de la cantidad inicial de soluto s_0 al tiempo de iniciar el proceso de mezclado.

Suponga que la solución que se inyecta al depósito tiene una concentración de C_1 gramos de soluto por litro, y fluye al mismo con una tasa de Q_1 litros por segundo, en tanto que la sustancia contenida en el depósito se mantiene bien mezclada por agitación, y fluye hacia afuera de éste a una tasa de Q_2 litros por segundo.
Obtenga la ecuación diferencial que resuelve el problema anterior.

$e)$ El número de habitantes $P(t)$ de una cierta ciudad satisface la ley logística

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{100}P - \frac{1}{10^8}P^2$$

donde el tiempo t se mide en años. Suponiendo que el número de habitantes de esta ciudad es de 161953 en el año $2002,$ determine:
$i)$ El número de habitantes como una función del tiempo.
$ii)$ La población en el año 2011
$iii)$ El año en que se duplicará la población de 2002
$iv)$ ¿Cuál será la población después de medio siglo a contar de 2002?

$f)$ Una resistencia de $R\,\Omega$ varía con el tiempo t (en segundos) de acuerdo a $R = 1 + 0.01\,t.$ Se conecta en serie con un condensador de $0.1\ F$ y un generador con una fem de $100V.$ La carga inicial en el condensador es de 5 coulombs. Encuentre:
$i)$ La carga y la corriente como una función del tiempo.
$ii)$ La carga máxima teórica. (Rpta. : 10 coulombs)

$g)$ Una cierta presa, en su máxima capacidad, contiene 1000 millones de m^3 de agua. En un instante dado, estando llena la presa, tiene una masa de 2 toneladas de contaminantes, distribuida en forma homogénea. Suponga que en temporada de lluvias entra agua a la presa a razón de 10 millones de m^3 por día, con una masa de contaminantes de 0.09% toneladas por millón de m^3 de agua y sale con la misma rapidez. Determine la cantidad de contaminantes en la presa en cualquier instante. ¿En cuánto tiempo se reducirá la contaminación total de la presa a 1.2 toneladas? (Rpta. : aproximadamente 130 días)

$h)$ Suponga que en el instante inicial 10 mil personas en una ciudad con una población de 100 mil habitantes han oído un cierto rumor. Después de una semana el número se ha incrementado a 20 mil personas. Si la tasa a la que se incrementa el rumor es proporcional al producto del número de habitantes que conocen el rumor y de los que no lo conocen, entonces ¿cuándo el 90% de la población sabrá el rumor?

$i)$ Considere que un cierto lago se llena con peces y que las tasas de natalidad y mortalidad son ambas inversamente proporcionales a la raíz cuadrada del número de peces.
Si inicialmente había 100 peces, y en 6 meses hay 170 peces, ¿cuántos habrá después de un año?

$j)$ Comúnmente las tasas de natalidad y mortalidad en poblaciones de animales varían periódicamente con el paso de las estaciones. Encuentre $P(t)$ si la población satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k + b\,cos(2\pi t))\,P$$

donde t está en años, y k y b son constantes positivas.

$k)$ En un circuito en serie se disponen un inductor de $1H$, una resistencia de 20Ω y un generador que suministra un voltaje de $40\,sen(60t)$ voltios, donde t se mide en segundos. Si la corriente inicial es de 1 amperio, obtenga la corriente después de medio segundo.

5 Resuelva:
$a)$ $x\,y'' + 2\,y' = 0$ y $x\,y'' + 2\,y' = x$, considerando el cambio de variable $v = y'$

$b)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$ haciendo el cambio de variable $z = \frac{y}{x^n}$ para un n adecuado

$c)$ $y' + y\,ln(y) = y\,e^x$ haciendo $v = ln(y)$

$d)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,sen(y) + 2\,sen(y)}$

6 Resuelva $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)\,dy = 0$ suponiendo que existe un factor integrante de la forma $x^m\,y^n$

7 La ecuación $\frac{dy}{dx} = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x)$ se llama **ecuación de Ricatti**. Muestre que el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{v}$ transforma la ecuación de Ricatti en una ecuación diferencial lineal para v, con y_1 una solución particular de la ecuación de Ricatti. Además resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$ sabiendo que $\frac{1}{x}$ es una solución particular.