UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST SUMATIVO (1.5 PUNTOS)
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ NOTA :________
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS FECHA : Ma 20/05/14

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= x_3 - 1 \\ x_1 &= 5 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

usando el método de Gauss

(15 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= x_3 - 1 \\ x_1 &= 5 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 1 + 2 - 0 - 2 = -4 \neq 0$

Las ecuaciones a usar son:
$A^{(0)} = A,\ b^{(0)} = b$
$A^{(k)} = S^{(k)}\, A^{(k-1)}$
$b^{(k)} = S^{(k)}\, b^{(k-1)},\ k = 1, 2, .., n-1\ (n = 3,$ luego $k = 1, 2)$

$*$ Iteración 1 (Para $k = 1$) :

$$S^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = S^{(1)}\, A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$b^{(1)} = S^{(1)}\, b^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$*$ Iteración 2 (Para $k = 2$) :

$$S^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = S^{(2)}\, A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$b^{(2)} = S^{(2)}\, b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

Resolvamos el sistema final :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{34}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-\frac{4}{5}x_3 = -\frac{34}{5} \Rightarrow x_3 = \frac{34}{4} = 8.5$$

$$\frac{5}{3}\,x_2 + \frac{1}{3}\,x_3 = \frac{16}{3} \;\Rightarrow x_2 = \frac{\frac{16}{3} - \frac{17}{6}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = \;-1 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+3+\frac{34}{4}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\frac{21}{2}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2} = 3.5$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{34}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ 8.5 \end{bmatrix} \quad \square$$