UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 4
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ NOTA :________
TIEMPO MÁXIMO : 30 MINUTOS FECHA : Vi 16/05/14

Obtenga una aproximación de $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3+1 & , 0 \le x \le 1 \\ x^2+1 & , 1 < x \le 2 \end{cases}$$

con $n = 6$.
Use las fórmulas de Simpson (x_0 a x_4) y del trapecio (x_4 a x_6)

(60 puntos)

<u>Solución:</u>
Notemos que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3+1)\,dx + \int_1^2 (x^2+1)\,dx$$

Por otro lado

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)\,dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\,dx + \int_{x_5}^{x_6} f(x)\,dx \approx$$

$$\frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\Big] + \frac{h}{3}\Big[f(x_2) + 4\,f(x_3) + f(x_4)\Big] + \frac{h}{2}\Big[f(x_4) + f(x_5)\Big]$$

$$+ \frac{h}{2}\Big[f(x_5) + f(x_6)\Big] =$$

$$\frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big] + \frac{h}{2}\Big[f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)\Big]$$

Calculemos, en primer lugar, la integral $\int_0^1 (x^3+1)\,dx$
$f(x) = x^3 + 1$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$

$x_0 = 0 \;\; ; \;\; x_1 = \frac{1}{6} \;\; ; \;\; x_2 = \frac{2}{6} \;\; ; \;\; x_3 = \frac{3}{6} \;\; ; \;\; x_4 = \frac{4}{6} \;\; ; \;\; x_5 = \frac{5}{6} \;\; ; \;\; x_6 = \frac{6}{6} = 1$

$f(x_0) = 1 \;\; ; \;\; f(x_1) \approx 1.00462963 \;\; ; \;\; f(x_2) \approx 1.037037037 \;\; ; \;\; f(x_3) = 1.125$

$f(x_4) \approx 1.296296296 \;\; ; \;\; f(x_5) \approx 1.57870304 \;\; ; \;\; f(x_6) = 2$

Reemplazando en la fórmula obtenida anteriormente, se tiene que:
$\int_0^1 (x^3+1)\,dx \;\approx$

$\frac{1}{18}\left[1 + 4\,(1.00462963) + 2\,(1.037037037) + 4\,(1.125) + 1.296296296\right] +$

$\frac{1}{12}\left[1.296296296 + 2\,(1.57870304) + 2\right] = 1.253858025$

Calculemos, en segundo lugar, la integral $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$
$f(x) = x^2 + 1$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$

$x_0 = 1 \;\; ; \;\; x_1 = \frac{7}{6} \;\; ; \;\; x_2 = \frac{8}{6} \;\; ; \;\; x_3 = \frac{9}{6} \;\; ; \;\; x_4 = \frac{10}{6} \;\; ; \;\; x_5 = \frac{11}{6} \;\; ; \;\; x_6 = \frac{12}{6} = 2$

$f(x_0) = 2 \;\; ; \;\; f(x_1) \approx 2.3611111111 \;\; ; \;\; f(x_2) \approx 2.777777778 \;\; ; \;\; f(x_3) = 3.25$

$f(x_4) \approx 3.777777778 \;\; ; \;\; f(x_5) \approx 4.361111111 \;\; ; \;\; f(x_6) = 5$

Reemplazando en la fórmula obtenida anteriormente, se tiene que:
$\int_1^2 (x^2+1)\,dx \;\approx$

$\frac{1}{18}\left[2 + 4\,(2.3611111111) + 2\,(2.777777778) + 4\,(3.25) + 3.777777778\right] +$

$\frac{1}{12}\left[3.777777778 + 2\,(4.361111111) + 5\right] = 3.334876543$

Finalmente
$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3+1)\,dx + \int_1^2 (x^2+1)\,dx \approx$

$1.253858025 + 3.334876543 = 4.588734568 \quad \square$