

**PAUTA TEST N° 1 MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO
NUMÉRICO
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 35 MINUTOS **FECHA : Vi 28/03/14**

Resuelva el sistema $ax + y = -1$, $x - ay = -1$, con $a \in \mathbb{R}$, usando:

- a) El método de Jordan
- b) El método de Gauss

(60 puntos)

Solución:

Tenemos que el sistema anterior escrito en forma matricial es $Ax = b$, con
 $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$; $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

En primer lugar debemos asegurarnos que el sistema tenga solución; para ello calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0$$

Recuerde que : $a^2 \geq 0$ y $a^2 + 1 \geq 1 > 0$

De lo anterior observamos que cualesquiera sea el valor de $a \in \mathbb{R}$, el sistema siempre tiene solución; observemos además que si $a = 0$, entonces
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la solución es $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) **Método de Jordan.**

Las ecuaciones a usar son:

$$A^{(1)} = A, b^{(1)} = b$$

$$A^{(k+1)} = J^{(k)} A^{(k)}$$

$$b^{(k+1)} = J^{(k)} b^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n \text{ (} n = 2, \text{ luego } k = 1, 2 \text{)}$$

* Etapa 1 (Para $k = 1$) :

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = J^{(1)} A^{(1)} = J^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = J^{(1)} b^{(1)} = J^{(1)} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix}$$

* Etapa 2 (Para $k = 2$) :

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\frac{-1-a^2}{a}}{\frac{-1-a^2}{a}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = J^{(2)} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = J^{(2)} b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a-a^2}{1+a^2} \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido un sistema diagonal.

$$A^{(3)} x = b^{(3)} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a-a^2}{1+a^2} \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a x_1 = \frac{-a-a^2}{1+a^2} \Rightarrow x_1 = -\frac{a+1}{1+a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{-1-a^2}{a} x_2 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{a-1}{1+a^2} \square$$

b) Método de Gauss.

Las ecuaciones a usar son:

$$A^{(0)} = A, b^{(0)} = b$$

$$A^{(k)} = S^{(k)} A^{(k-1)}$$

$$b^{(k)} = S^{(k)} b^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (n=2, \text{ luego } k=1)$$

* Etapa 1 (Para $k=1$) :

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$$

$$A^{(1)} = S^{(1)} A^{(0)} = S^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = S^{(1)} b^{(0)} = S^{(1)} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix}$$

Hemos logrado un sistema triangular superior.

$$A^{(1)} x = b^{(1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & \frac{-1-a^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-a}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{-1-a^2}{a} x_2 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1-a}{-1-a^2} = \frac{a-1}{1+a^2} \Rightarrow a x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow a x_1 = -1 - x_2 \Rightarrow a \neq 0$$

$$x_1 = \frac{-1-a}{1+a^2} = -\frac{a+1}{1+a^2} \square$$