UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ NOTA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 38 MINUTOS FECHA : Ju 29/05/14

1) $a)$ Deducir la fórmula de integración que permite calcular integrales del tipo
$\int_0^3 x^2\, f(x)\, dx\,,\ f \in \mathcal{C}[\,0\,,\,3]$

haciendo evaluaciones de f en los puntos $x_0 = 0,\ x_1 = 1\,,\ x_2 = 3$ y usando como base $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ para un n adecuado.
$b)$ Usando la fórmula obtenida en $a)$, calcule el valor aproximado de
$I = \int_0^3 x^3\, e^x\, dx$
usando 5 decimales correctamente redondeados en todos sus cálculos.

(15 puntos)

<u>Solución:</u>
$a)$ En este caso la función de peso es $p(x) = x^2$, luego el sistema a resolver es :
$\sum_{i=0}^{n} A_i\, \varphi_k(x_i) = \int_a^b p(x)\ \varphi_k(x)\, dx\,,\ k = 0, 1, 2, ..., n$
con $n = 2,\ \varphi_0(x) = 1\,;\ \varphi_1(x) = x\,; \varphi_2(x) = x^2\,; x_0 = 0\,;\ x_1 = 1; x_2 = 3.$

Para $k = 0$:

$$A_0\, \varphi_0(x_0) + A_1\, \varphi_0(x_1) + A_2\, \varphi_0(x_2) = \int_0^3 x^2 \varphi_0(x)\, dx \Rightarrow$$

$$A_0\ + A_1\ + A_2\ = \int_0^3 x^2\, dx \Rightarrow \quad A_0\ + A_1\ + A_2\ = 9 \qquad (1)$$

Para $k = 1$:

$$A_0\, \varphi_1(x_0) + A_1\, \varphi_1(x_1) + A_2\, \varphi_1(x_2) = \int_0^3 x^2 \varphi_1(x)\, dx \Rightarrow$$

$$A_0\, x_0 + A_1\, x_1 + A_2 x_2\ = \int_0^3 x^2 x\, dx \Rightarrow \quad A_1\ + 3A_2\ = \frac{81}{4} \qquad (2)$$

Para $k = 2$:

$$A_0\,\varphi_2(x_0) + A_1\,\varphi_2(x_1) + A_2\,\varphi_2(x_2) = \int_0^3 x^2 \varphi_2(x)\,dx \Rightarrow$$

$$A_0\,x_0^2 + A_1\,x_1^2 + A_2 x_2^2 \;= \int_0^3 x^2 x^2\,dx \Rightarrow \quad A_1 \;+ 9A_2 \;= \frac{243}{5} \qquad (3)$$

De $(3)-(2)$:

$$6A_2 = \frac{567}{20} \Rightarrow A_2 = \frac{567}{120} \Rightarrow A_2 = \frac{189}{40}$$

De (3) : $A_1 = \frac{243}{5} - 9A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{243}{40}$

De (1) : $A_0 = 9 - A_1 - A_2 \Rightarrow A_0 = \,-\,\frac{9}{5}$

$$\therefore \int_0^3 x^2\,f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) =$$

$$-\,\frac{9}{5} f(0) + \frac{243}{40} f(1) + \frac{189}{40} f(3) = \frac{1}{40}\left[-\,72\,f(0) + 243\,f(1) + 189\,f(3)\right] \quad \square$$

$b)$ $I = \int_0^3 x^3\,e^x\,dx = \int_0^3 x^2\,(xe^x)\,dx$

Observamos que $f(x) = x\,e^x$, luego
$f(0) = 0\,;\; f(1) = e \approx 2.71828\,;\; f(3) = 3\,e^3 \approx 60.25661$

$$\therefore I = \int_0^3 x^3\,e^x\,dx \approx \frac{1}{40}\left[-\,72\,f(0) + 243\,f(1) + 189\,f(3)\right] =$$
$$\frac{1}{40}\left[-\,72\,(0) + 243\,(2.71828) + 189\,(60.25661)\right] =$$
$$\frac{1}{40}\left[12049.04133\right] \approx 301.22603 \quad \square$$

2) Use el método de Halley para obtener la raíz negativa de la ecuación $x^3 + 5 \;= 3\,x^2 + 3\,x$ con un error menor que 10^{-2}. Considere 5 decimales.

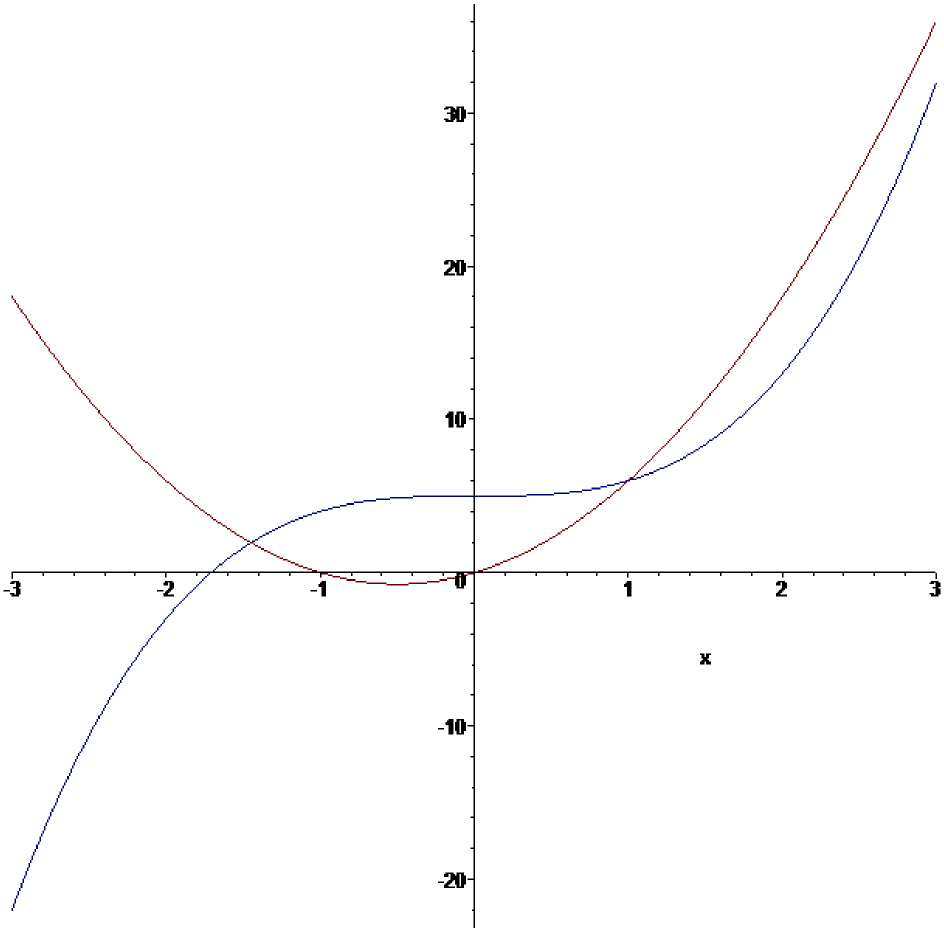
(15 puntos)

Solución:

Recordemos que la fórmula de Halley es :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 f(x_n)\,f'(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^2 - f(x_n)\,f''(x_n)} \;;\; n = 0, 1, 2, ...$$

Notemos que $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5.$ Luego
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$
$f''(x) = 6x - 6$
Si graficamos la función la función cúbica y la parábola podremos saber en qué intervalo está la raíz negativa.



Observamos que en el intervalo $[-2, -1]$ existe una raíz y es negativa.
Aplicando el método de la bisección tenemos que :
$f(a) = f(-2) = -9 < 0$
$f(b) = f(-1) = 4 > 0$
$x_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5$
$f(x_1) = f(-1.5) = -0.625 < 0$
Luego $a = -1\,;\, b = -1.5\,;\, x_1 = \frac{-1-1.5}{2} = -\frac{2.5}{2} = -1.25$

Partamos aplicando el método de Halley con la aproximación inicial $x_0 = -1.25$
$\underline{n = 0:}$
$x_0 = -1.25$
$f(x_0) = f(-1.25) = 2.10938\,;\, f'(x_0) = f'(-1.25) = 9.1875\,;$
$f''(x_0) = f''(-1.25) = -13.50$
$x_1 = x_0 - \frac{2f(x_0)\,f'(x_0)}{2\left[f'(x_0)\right]^2 - f(x_0)\,f''(x_0)} =$

$-1.25 - \frac{38.7598}{197.297} \approx -1.25 - 0.19645 = -1.44645$

Error $= |x_1 - x_0| = 0.19645 > 0.01$

$\underline{n = 1:}$
$x_1 = -1.44645$
$f(x_1) = f(-1.44645) = 0.03640\,;$
$f'(x_1) = f'(-1.44645) = 11.95535\,;$
$f''(x_1) = f''(-1.44645) = -14.6787$
$x_2 = x_1 - \frac{2f(x_1)\,f'(x_1)}{2\left[f'(x_1)\right]^2 - f(x_1)\,f''(x_1)} =$

$-1.44645 - \frac{0.87054}{286.3952} \approx -1.44645 - 0.00304 = -1.44949$

Error $= |x_2 - x_1| = 0.00304 < 0.01$

La solución aproximada final es $x_2 = -1.44949$★

3) Considerar la función $K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2(\alpha)\,sen^2(\beta)}\;d\beta$ tabulada como sigue:

$\alpha\,(grados)$	0	5	10	15	20
$K(\alpha)$	1.570796	1.567808	1.558888	1.544151	1.523800

Calcule, usando interpolación polinomial, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.01485\,sen^2(\beta)}\;d\beta$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

Si comparamos $K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2(\alpha)\,sen^2(\beta)}\;d\beta$ con $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0.01485\,sen^2(\beta)}\;d\beta$ observamos que $sen^2(\alpha) = 0.01485$

Luego, $sen^2(\alpha) = 0.01485 \Rightarrow sen(\alpha) = \sqrt{0.01485} \Rightarrow \alpha = Arcsen(0.12186) = 7$
Ahora

$$l_0(7) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{4} \frac{7-\alpha_j}{0-\alpha_j} = \frac{7-\alpha_1}{-\alpha_1}\,\frac{7-\alpha_2}{-\alpha_2}\,\frac{7-\alpha_3}{-\alpha_3}\,\frac{7-\alpha_4}{-\alpha_4} = \frac{7-5}{-5}\,\frac{7-10}{-10}\,\frac{7-15}{-15}\,\frac{7-20}{-20} =$$

$$\frac{(2)(-3)(-8)(-13)}{(-5)(-10)(-15)(-20)} = -\frac{624}{15000} = -\frac{26}{625} = -0.0416$$

$$l_1(7) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{4} \frac{7-\alpha_j}{5-\alpha_j} = \frac{7-\alpha_0}{5-\alpha_0}\,\frac{7-\alpha_2}{5-\alpha_2}\,\frac{7-\alpha_3}{5-\alpha_3}\,\frac{7-\alpha_4}{5-\alpha_4} = \frac{7-0}{5-0}\,\frac{7-10}{5-10}\,\frac{7-15}{5-15}\,\frac{7-20}{5-20} =$$

$\frac{(7)(-3)(-8)(-13)}{(5)(-5)(-10)(-15)} = \frac{2184}{3750} = \frac{364}{625} = 0.5824$

$$l_2(7) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{4} \frac{7-\alpha_j}{10-\alpha_j} = \frac{7-\alpha_0}{10-\alpha_0}\,\frac{7-\alpha_1}{10-\alpha_1}\,\frac{7-\alpha_3}{10-\alpha_3}\,\frac{7-\alpha_4}{10-\alpha_4} = \frac{7-0}{10-0}\,\frac{7-5}{10-5}\,\frac{7-15}{10-15}\,\frac{7-20}{10-20} =$$

$\frac{(7)(2)(-8)(-13)}{(10)(5)(-5)(-10)} = \frac{1456}{2500} = \frac{364}{625} = 0.5824$

$$l_3(7) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 3}}^{4} \frac{7-\alpha_j}{15-\alpha_j} = \frac{7-\alpha_0}{15-\alpha_0}\,\frac{7-\alpha_1}{15-\alpha_1}\,\frac{7-\alpha_2}{15-\alpha_2}\,\frac{7-\alpha_4}{15-\alpha_4} = \frac{7-0}{15-0}\,\frac{7-5}{15-5}\,\frac{7-10}{15-10}\,\frac{7-20}{15-20} =$$

$\frac{(7)(2)(-3)(-13)}{(15)(10)(5)(-5)} = -\frac{546}{3750} = -\frac{91}{625} = -0.1456$

$$l_4(7) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 4}}^{4} \frac{7-\alpha_j}{20-\alpha_j} = \frac{7-\alpha_0}{20-\alpha_0}\,\frac{7-\alpha_1}{20-\alpha_1}\,\frac{7-\alpha_2}{20-\alpha_2}\,\frac{7-\alpha_3}{20-\alpha_3} = \frac{7-0}{20-0}\,\frac{7-5}{20-5}\,\frac{7-10}{20-10}\,\frac{7-15}{20-15} =$$

$\frac{(7)(2)(-3)(-8)}{(20)(15)(10)(5)} = \frac{336}{15000} = \frac{14}{625} = 0.0224$

$$\therefore K(7) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.01485\,sen^2(\beta)}\;d\beta \approx p(7) =$$
$$K(\alpha_0)\,l_0(7) + K(\alpha_1)\,l_1(7) + K(\alpha_2)\,l_2(7) + K(\alpha_3)\,l_3(7) + K(\alpha_4)\,l_4(7) =$$
$$1.570796\,(-0.0416) + 1.567808\,(0.5824) + 1.558888\,(0.5824) +$$
$$1.544151\,(-0.1456) + 1.523800\,(0.0224) \approx 1.564947 \;\square$$

4) Escriba un programa en C que muestre por pantalla, con 9 decimales, una raíz de la función $f(x) = e^x\,sen(x) - 1$ usando el método de Newton-Raphson. Suponga que el usuario ingresa la aproximación inicial, que debe satisfacer la condición de convergencia, y además el error.
Debe usar funciones definidas por usted.

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
float f(float);
float fp(float);
float fpp(float);
float f(float x)
{
  return(exp(x)*sin(x)-1);
}
```

```
float fp(float x)
{
 return(exp(x)*sin(x)+exp(x)*cos(x));
}

float fpp(float x)
{
 return(2*exp(x)*cos(x));
}

int main()
{
 float error, x0,x1;
 printf("\nIngrese el error : ");
 scanf("%f",&error);
 do
 {
  printf("\Ingrese la aproximaci%cn inicial : ",162);
  scanf("%f",&x0);
 }
 while(fabs(f(x0)*fpp(x0))>=pow(fp(x0),2));
 do
 {
  x1=x0-f(x0)/fp(x0);
  x0=x1;
 }
 while(fabs(f(x0)/fp(x0))>=error);
 printf("\nLa soluci%cn aproximada es : %0.9f\n\n",162,x1);
 system("PAUSE");
 return 0;
}
```