UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ NOTA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ma 29/04/14

1) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a)$ Resuelva el sistema usando el método de Jordan.
$b)$ Realice 2 iteraciones del método de Jacobi, usando el vector inicial $x^{(0)} = (0,0,0)^T,$ y evalúe el test de detención.

(15 puntos)

<u>Solución:</u>
Las ecuaciones a usar son:
$A^{(1)} = A,\ b^{(1)} = b$
$A^{(k+1)} = J^{(k)}\, A^{(k)}$
$b^{(k+1)} = J^{(k)}\, b^{(k)},\ k = 1, 2, .., n\ (n = 3,$ luego $k = 1, 2, 3)$

$*$ Iteración 1 (Para $k = 1)$:

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{0}{1} & 1 & 0 \\ -\frac{-1}{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = J^{(1)}\, A^{(1)} = J^{(1)}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$b^{(2)} = J^{(1)}\, b^{(1)} = J^{(1)}\, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$*$ Iteración 2 (Para $k=2$) :

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = J^{(2)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = J^{(2)}b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$*$ Iteración 3 (Para $k=3$) :

$$J^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{13}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{23}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{-3}{-2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = J^{(3)}A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b^{(4)} = J^{(3)}b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido un sistema diagonal.

$$A^{(4)}x = b^{(4)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} \qquad -2x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$$

$b)$

Jacobi.

Recordemos que $A = D - L - U$, con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^{(k+1)} = M\,x^{(k)} + d$

con $M = D^{-1}(L+U)$ y $d = D^{-1}\,b$

Notemos que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Luego

$$M = L + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Iteración $1\,(k=0)$: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^{(1)} = M\,x^{(0)} + d = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$error = \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

Iteración $2\,(k=1)$:

$$x^{(2)} = M\,x^{(1)} + d = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$error = \left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 3 \quad \square$$

2) En un trabajo experimental se han obtenido los valores que a continuación se indican

t	1.00	3.00	6.00	9.00	15.00
$y(t)$	5.12	3.00	2.48	2.34	2.18

Si el modelo que describe el fenómeno está dado por $y(t) = \frac{a}{b+t}$, entonces determine, por el método de los mínimos cuadrados, las constantes a y b.

(15 puntos)

Solución:

Tenemos que

$$y(t) = \frac{a}{b+t} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = \frac{b+t}{a} \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = \frac{b}{a} + \frac{t}{a} \Rightarrow R(t) = A + B\,t$$

donde $R(t) = \frac{1}{y(t)}$, $A = \frac{b}{a}$, $B = \frac{1}{a}$

La tabla a usar es :

t	1.00	3.00	6.00	9.00	15.00
$R(t) = \frac{1}{y(t)}$	0.20	0.33	0.40	0.43	0.46

Los elementos básicos son : $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$

El sistema a resolver es :

$$\begin{bmatrix} <\varphi_1,\varphi_1> & <\varphi_1,\varphi_2> \\ <\varphi_2,\varphi_1> & <\varphi_2,\varphi_2> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <R,\varphi_1> \\ <R,\varphi_2> \end{bmatrix}$$

$$<\varphi_1,\varphi_1> \; = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(t_i) = \sum_{i=1}^{5} 1 = 5$$

$$<\varphi_1,\varphi_2> \; = \; <\varphi_2,\varphi_1> \; = \sum_{i=1}^{5} \varphi_1(t_i)\,\varphi_2(t_i) = \sum_{i=1}^{5} t_i = 34$$

$$<\varphi_2,\varphi_2> \; = \sum_{i=1}^{5} \varphi_2^2(t_i) \; = \sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 352$$

$$<R,\varphi_1> \; = \sum_{i=1}^{5} R(t_i)\,\varphi_1(t_i) = \sum_{i=1}^{5} R(t_i) = 1.82$$

$$<R,\varphi_2> \; = \sum_{i=1}^{5} R(t_i)\,\varphi_2(t_i) = \sum_{i=1}^{5} t_i\,R(t_i) = 14.36$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} <\varphi_1,\varphi_1> & <\varphi_1,\varphi_2> \\ <\varphi_2,\varphi_1> & <\varphi_2,\varphi_2> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <R,\varphi_1> \\ <R,\varphi_2> \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 352 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.82 \\ 14.36 \end{bmatrix} \Rightarrow A \approx 0.252317 \; ; \; B \approx 0.016424$$

Luego, $B = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{B} \Rightarrow a \approx 60.89$

$A = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,A \Rightarrow b \approx (60.89)(0.252317) \Rightarrow b \approx 15.37$

Finalmente, la función buscada es $y(t) = \frac{60.89}{15.37+\,t}$ ❑

3) Obtenga la descomposición de Cholesky para la matriz de Gram $M = (m_{i\,j})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$ donde $m_{i\,j} \;=\; <\varphi_i \,,\, \varphi_j\;>$, $\varphi_i(x) = (a\,x)^i$, $a \neq 0$ y $<f, g> \;= \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\varphi_0\,,\,\varphi_0\;> & <\varphi_0\,,\,\varphi_1\;> \\ <\varphi_1\,,\,\varphi_0\;> & <\varphi_1\,,\,\varphi_1\;> \end{bmatrix}$$

$$<\varphi_0\,,\,\varphi_0\;> \;= \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = \int_0^1\; dx = 1$$

$$<\varphi_1\,,\,\varphi_0\;> \;=\; <\varphi_0\,,\,\varphi_1\;> \;= \int_0^1 \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\;\; dx = \int_0^1 ax\,dx = a\int_0^1 x\,dx = \frac{a}{2}$$

$$<\varphi_1\,,\,\varphi_1\;> \;= \int_0^1 \varphi_1^2(x)\;\; dx = \int_0^1 (ax)^2\,dx = a^2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{a^2}{3}$$

Luego, $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} \end{bmatrix}$

Notemos que M es simétrica, y además definida positiva. En efecto,
$|\,1\,| = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}\; > 0, \text{ pues } a \neq 0$$

Podemos obtener la factorización de Cholesky sin problemas.

$$M = L\,L^T \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$1 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{1} \;\Rightarrow l_{11} = 1$$

$\frac{a}{2} = l_{11} l_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a}{2}$

$\frac{a^2}{3} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22}^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow l_{22}^2 = \frac{a^2}{12} \Rightarrow l_{22} = \frac{|a|}{\sqrt{12}}$

Por lo tanto, $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{|a|}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$ ❑

4) Escriba un programa en C que lea el orden n y los elementos a_{ij} y b_{ij} de dos matrices cuadradas A y B, respectivamente, y calcule

$$< A, B > \; = Traza(B^T A)$$

(15 puntos)

<u>Solución:</u>

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
  int i,j,k,n;
  float traza=0.0;
  printf("\nn : ");
  scanf("%i",&n);
  float a[n][n], b[n][n], bt[n][n], bta[n][n];
  for(i=0;i<=n-1;i++)
   for(j=0;j<=n-1;j++)
   {
    printf("\na[%i][%i] = ",i+1,j+1);
    scanf("%f",&a[i][j]);
   }
  for(i=0;i<=n-1;i++)
   for(j=0;j<=n-1;j++)
   {
    printf("\nb[%i][%i] = ",i+1,j+1);
    scanf("%f",&b[i][j]);
   }
```

```
 for(i=0;i<=n-1;i++)
  for(j=0;j<=n-1;j++)
   bt[i][j]=b[j][i];

 for(i=0;i<=n-1;i++)
  for(j=0;j<=n-1;j++)
  {
    bta[i][j]=0.0;
    for(k=0;k<=n-1;k++)
     bta[i][j]=bta[i][j]+bt[i][k]*a[k][j];
  }
 for(i=0;i<=n-1;i++)
  traza=traza+bta[i][i];
 printf("\n<A,B> = %0.5f\n\n",traza);
 system("PAUSE");
 return 0;
}
```
❑