Algunos elementos del cálculo.

Teorema 1.1 (Teorema del valor intermedio).
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y definamos,

$$m = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \qquad M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Entonces, para cualquier número $c \in [m, M]$ existe al menos un número $\gamma \in [a, b]$ tal que $f(\gamma) = c$.

Teorema 1.2 (Teorema del valor medio).
Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable para todo x tal que $a < x < b$. Entonces existe al menos un $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)$$

Teorema 1.3 (Teorema de Taylor).
Sea f una función continua en $[a, b]$ con $n+1$ derivadas continuas sobre (a, b) para algún $n \geq 0$. Si $x, x_0 \in (a, b)$, entonces

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$$

donde

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

y

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi)$$ donde ξ está entre x_0 y x.

Espacios vectoriales.

Definición 1.1 (Espacio vectorial).
Un *espacio vectorial (real)* es un conjunto V provisto de las operaciones de adición $(+)$ y multiplicación por escalar $(\cdot)$ que satisface las siguientes propiedades:

A1) $(u+v)+w=u+(v+w)$, $\forall\, u,v,w \in V$

A2) Existe $\theta \in V$ tal que $\theta + v = v + \theta = v$, $\forall\, v \in V$

A3) Dado $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = \theta$

A4) $u + v = v + u$, $\forall\, u, v \in V$

P1) $\alpha\,(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$

P2) $(\alpha + \beta)\, v = \alpha v + \beta v$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$

P3) $(\alpha\beta)\, v = \alpha(\beta v)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, v \in V$

P4) Existe $1 \in V$ tal que $1 \cdot v = v$, $\forall\, v \in V$

Definición 1.2 (Subespacio vectorial).
Si V es un espacio vectorial y $W \subseteq V$ es tal que

$(i) W \neq \emptyset$

$(ii) \forall u, v \in W$ se cumple $u + v \in W$

$(iii) \forall v \in W, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ se verifica $\alpha\, v \in W$

Entonces se dice que W es un *subespacio vectorial* de V.

Espacios normados.

Definición 1.3 (Norma).
Sea V un espacio vectorial real. Se llama *norma* sobre V a una función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades:

$(i)\ \| v \| \geq 0 \,, \forall\, v \in V$

$(ii) \| v \| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = \theta$

$(iii) \| \alpha v \| = | \alpha | \, \| v \| \,, \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \,, \forall\, v \in V$

$(iv) \| v + w \| \leq \| v \| + \| w \| \,, \forall\, v \,, w \in V$

Definición 1.4 (Espacio normado).
Un espacio vectorial V cuando está provisto de una norma se denomina *espacio vectorial normado* y se simboliza $(V, \| \ \|)$.

Obs.: Para un mismo espacio vectorial se puede definir más de una norma.

Definición 1.5 (Normas equivalentes).
Dos normas $\| \ \|_a$ y $\| \ \|_b$, definidas sobre un mismo espacio vectorial V, se dicen *equivalentes* si,
$\exists\ c_1, c_2 > 0 \ \textit{talque}\ \forall\, v \in V :\ c_1 \| \ v \ \|_a \leq \| \ v \ \|_b \leq c_2 \| \ v \ \|_a$

Obs.: En un espacio V de dimensión finita, dos normas cualesquiera definidas sobre él son equivalentes.

Espacios con producto interior o prehilbert.

Definición 1.6 (Producto interior).
Sea V un espacio vectorial real. Se llama *producto interior* sobre V a una función $< \ , \ > : V \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades:

(i) $< v, v > \geq 0 \, , \forall \, v \in V$

(ii) $< v, v > = 0 \Leftrightarrow v = \theta$

(iii) $< v, w > = < w, v > , \forall \, v, w \in V$

(iv) $< v, \alpha w + \beta x > = \alpha < v, w > + \beta < v, x > \, , \forall \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, , \forall \, v, w, x \in V$

Definición 1.7 (Espacio con producto interior o espacio prehilbert).
Un espacio vectorial V cuando está provisto de un producto interior se denomina *espacio vectorial con producto interior o prehilbert* y se simboliza $(V , < \ , \ >)$.

Obs.: Una consecuencia importante de la definición anterior es que la función $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$ definida sobre V es una norma, y corresponde a la *norma inducida por el producto interior*.
Por lo tanto $(V , < \ , \ >)$ también puede ser considerado como espacio normado con la norma natural inducida por el producto interior.

Espacios métricos.

Definición 1.8 (Distancia).
Sea $V \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera. Se define la *distancia de x a y*, denotada por $d(x,y)$, a la función sobre $V \times V$ con valores reales que satisface las siguientes propiedades:

(i) $d(x,y) \geq 0$, $\forall\, x\,, y \in V$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x\,, y \in V$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall\, x\,, y\,, z \in V$

Definición 1.9 (Espacio métrico).
Un conjunto V cuando está provisto de una distancia d se denomina *espacio métrico* y se simboliza (V, d).

Obs.: Una consecuencia importante de la definición anterior es que a partir de un espacio normado es posible definir un espacio métrico haciendo uso de la *distancia inducida por la norma*, que está dada por:

$$d(x\,, y) = \| x - y \|$$

Definición 1.10 (Convergencia en un espacio normado).
1) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en un espacio normado $(V, \|\ \ \|)$ converge al vector $x \in V$ si $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$.
2) Si $(V, \|\ \ \|_a)$ y $(V, \|\ \ \|_b)$ son dos espacios normados cuyas normas son equivalentes , entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(V, \|\ \ \|_a)$ si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(V, \|\ \ \|_b)$.