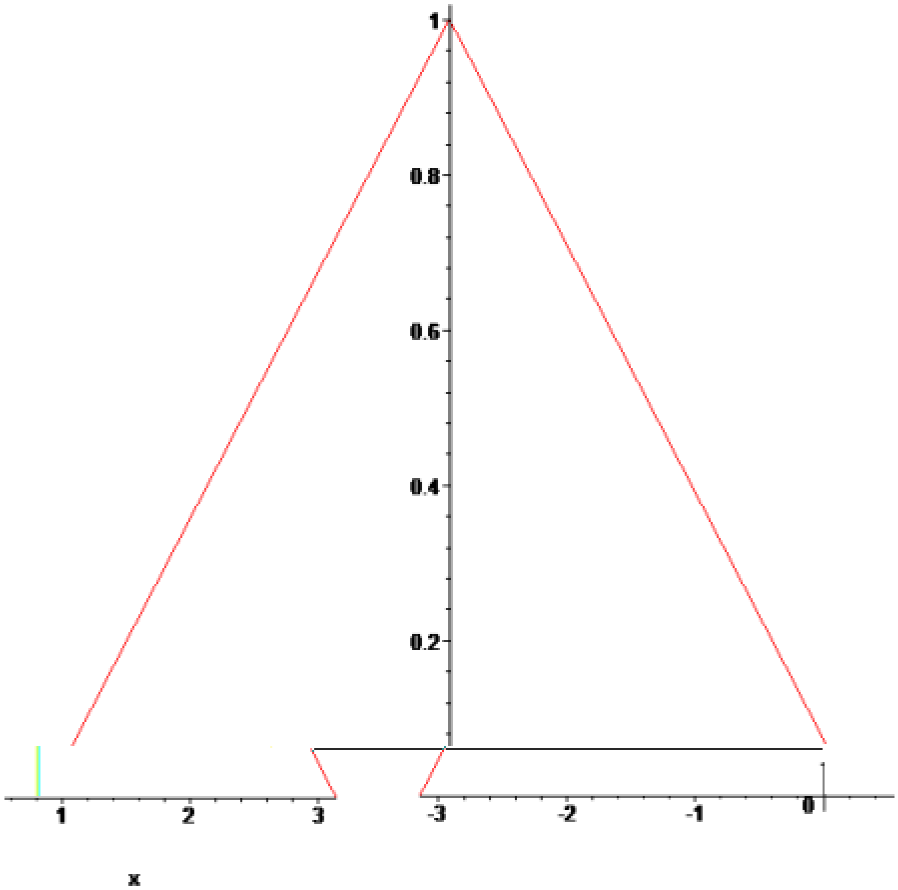
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

EJERCICIOS RESUELTOS
CÁLCULO NUMÉRICO

(1) Dada la función f con dominio $[-\pi, \pi]$, que se muestra en el gráfico siguiente



Obtenga la mejor aproximación continua de mínimos cuadrados de dicha función, utilizando como base el conjunto $B = \{1, sen(x), cos(x)\}$.

Solución:

Determinemos en primer lugar, la expresión para f.
Notemos que en el intervalo $[-\pi\,,\,0]$ los puntos que usaremos para obtener la ecuación de la recta son $P = (x_0, y_0) = (0\,,\,1)$ y $Q = (x_1, y_1) = (-\pi\,,\,0)$. Luego

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{0-1}{-\pi-0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{\pi}x + 1$$

En el intervalo $[0\,,\,\pi]$ los puntos a usar son $P = (x_0, y_0) = (0\,,\,1)$ y $Q = (x_1, y_1) = (\pi\,,\,0)$. Luego

$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{0-1}{\pi - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{\pi}x + 1$

Por lo tanto, la función es $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x + 1 \quad , \ -\pi \leq x < 0 \\ \\ -\frac{1}{\pi}x + 1 \ , \ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Observemos que los elementos básicos son :

$\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = sen(x), \ \varphi_3(x) = cos(x)$

Luego, el sistema normal a resolver es :

$$\begin{bmatrix} <\varphi_1, \varphi_1> & <\varphi_1, \varphi_2> & <\varphi_1, \varphi_3> \\ <\varphi_2, \varphi_1> & <\varphi_2, \varphi_2> & <\varphi_2, \varphi_3> \\ <\varphi_3, \varphi_1> & <\varphi_3, \varphi_2> & <\varphi_3, \varphi_3> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <f, \varphi_1> \\ <f, \varphi_2> \\ <f, \varphi_3> \end{bmatrix}$$

Calculemos los productos internos.

$$<\varphi_1, \varphi_1> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$
$$<\varphi_1, \varphi_2> \ = \ <\varphi_2, \varphi_1> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x) \ \varphi_2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\, dx = 0$$
$$<\varphi_1, \varphi_3> \ = \ <\varphi_3, \varphi_1> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x) \ \varphi_3(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\, dx = 0$$
$$<\varphi_2, \varphi_2> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen^2(x)\, dx = \pi$$
$$<\varphi_2, \varphi_3> \ = \ <\varphi_3, \varphi_2> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(x) \ \varphi_3(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\, cos(x)\, dx = 0$$
$$<\varphi_3, \varphi_3> \ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_3^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(x)\, dx = \pi$$
$$<f, \varphi_1> \ = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \varphi_1(x) \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx =$$
$$\int_{-\pi}^{0} (\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx + \int_{0}^{\pi} (-\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \pi$$
$$<f, \varphi_2> \ = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \varphi_2(x) \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\, f(x)\, dx =$$
$$\int_{-\pi}^{0} sen(x)\, (\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx + \int_{0}^{\pi} sen(x)\, (-\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx = -1 + 1 = 0$$
$$<f, \varphi_3> \ = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \varphi_3(x) \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\, f(x)\, dx =$$
$$\int_{-\pi}^{0} cos(x)\, (\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx + \int_{0}^{\pi} cos(x)\, (-\tfrac{1}{\pi}x + 1)\, dx = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{2}{\pi} = \tfrac{4}{\pi}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} <\varphi_1, \varphi_1> & <\varphi_1, \varphi_2> & <\varphi_1, \varphi_3> \\ <\varphi_2, \varphi_1> & <\varphi_2, \varphi_2> & <\varphi_2, \varphi_3> \\ <\varphi_3, \varphi_1> & <\varphi_3, \varphi_2> & <\varphi_3, \varphi_3> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <f, \varphi_1> \\ <f, \varphi_2> \\ <f, \varphi_3> \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \frac{4}{\pi} \end{bmatrix} \Rightarrow a_1^* = \frac{1}{2} = 0.5\, ; \ a_2^* = 0 \ ; \ a_3^* = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.4053$$

Finalmente la mejor aproximación continua es

$$\phi^*(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\, cos(x)$$

Si graficamos la función original y la mejor aproximación en el intervalo considerado se tiene :