

**PAUTA TEST N° 3**  
**CÁLCULO DIFERENCIAL**  
**INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL**

**NOMBRE :** \_\_\_\_\_ **PTOS. :** \_\_\_\_\_  
**TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS** **FECHA : Lu 13/06/05**  
**PROFESOR:** *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

a) Obtenga el valor de  $k$  de modo que  $x^2 + y^2 + 4x - 3y - k = 0$  sea la ecuación de una circunferencia de radio 5.  
Grafique la circunferencia obtenida.

**(30 puntos)**

**Solución:**

Completemos cuadrados :

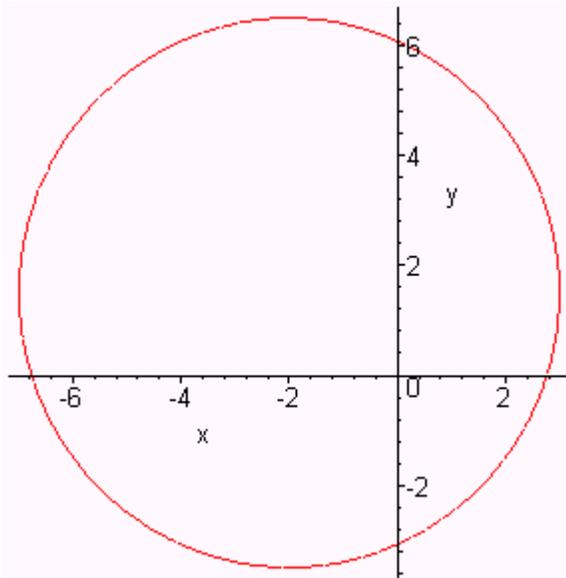
$$x^2 + y^2 + 4x - 3y - k = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 - 3y) = k \Rightarrow$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 3y + \frac{9}{4}) = k + 4 + \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$(x + 2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = k + 4 + \frac{9}{4} \Rightarrow \text{radio}=5 \quad k + 4 + \frac{9}{4} = 5^2 \Rightarrow$$

$$k + 4 + \frac{9}{4} = 25 \Rightarrow k = 25 - 4 - \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{75}{4}$$

Grafiquemos la circunferencia de radio 5 y centro  $C = (-2, \frac{3}{2})$  :



b) Obtenga los puntos de intersección, si existen, de la circunferencia  $x^2 + y^2 - y - 5 = 0$  con la recta  $y + 1 - x = 0$ .  
Grafique la circunferencia y la recta.

(30 puntos)

**Solución:**

De la ecuación de la recta se tiene que :  $x = y + 1$

Reemplazando lo anterior en la ecuación de la circunferencia  $x^2 + y^2 - y - 5 = 0$  :

$$x^2 + y^2 - y - 5 = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 + y^2 - y - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 - y - 5 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(4)}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \approx 1.186 \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \approx -1.686 \end{cases}$$

Reemplazando  $y_1$  en la expresión  $x = y + 1$  obtenemos :

$$x_1 = y_1 + 1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} + 1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2.186$$

De forma similar :

$$x_2 = y_2 + 1 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} + 1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \approx -0.686$$

Por lo tanto, los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia son :

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left( \frac{3 + \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \right)$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left( \frac{3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \right)$$

Para graficar necesitamos conocer el centro y el radio de la circunferencia, para ello completamos cuadrados :

$$x^2 + y^2 - y - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - y) = 5 \Rightarrow x^2 + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = 5 \Rightarrow$$

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 5 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4}$$

Observamos que el centro es  $C = (0, \frac{1}{2})$  y el radio es  $\sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2.291$

