UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 3
CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Vi 08/07/05

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __F__ La función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , x < 0 \\ x^2 - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ no es continua en $x = 1$

Justificación:
Tenemos que

$f(1) = 1^2 - 1 = 0$, pues $1 > 0$
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Por lo tanto, $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y la función es continua en $x = 1$.★

$b)$ __F__ $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 3$

Justificación:
Sean
$u^2 = x \Rightarrow u = \sqrt{x}$
$v^2 = 3 \Rightarrow v = \sqrt{3}$

Luego
$\frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{u^2\,u - v^2\,v}{u - v} = \frac{u^3 - v^3}{u - v} = \frac{(u-v)\,(u^2+uv+v^2)}{u-v} = u^2 + uv + v^2 =$

$x + \sqrt{3}\sqrt{x} + 3$
$\therefore \lim\limits_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to 3} (x + \sqrt{3}\sqrt{x} + 3) = 3 + 3 + 3 = 9 \neq 3$★

$c)$ __F__ La recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(1, -1)$ es $y + 4 = 3x$

Justificación:
Notemos que el punto $(1, -1)$ no pertenece a la curva, pues

$y = x^3 \Rightarrow -1 = 1^3 \Rightarrow -1 = 1$

lo que es claramente falso.
Luego, es imposible obtener la recta tangente a $y = x^3$ en el punto $(1,\,-1)$ porque tal punto no pertenece a la curva.★

$d)$ __F__ Si la función $y(x)$ está definida implícitamente por $x^2 + y^2 = 1$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

Justificación:
Derivando implícitamente $x^2 + y^2 = 1$ tenemos :

$$(x^2 + y^2)' = (1)' \Rightarrow 2x + 2y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \neq -\frac{y}{x}$$★

$e)$__F__Si $y = sen(x^2 - 1) + e^{x^2} - x^3 + \frac{2}{x}$, entonces $y' = cos(x^2 - 1) + e^{x^2} - 3x^2 + 2\,ln(x)$

Justificación:

$$y = sen(x^2 - 1) + e^{x^2} - x^3 + \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \Big[sen(x^2 - 1)\Big]' + (e^{x^2})' - (x^3)' + \left(\frac{2}{x}\right)'$$

$$\Rightarrow y' = cos(x^2 - 1)\,(x^2 - 1)' + e^{x^2}\,(x^2)' - 3x^2 + (2x^{-1})' \Rightarrow$$

$$y' = cos(x^2 - 1)\,(2x) + e^{x^2}\,(2x) - 3x^2 + (-2x^{-2}) \Rightarrow$$

$$y' = 2x\,cos(x^2 - 1) + 2x\,e^{x^2} - 3x^2 - 2x^{-2} \neq cos(x^2 - 1) + e^{x^2} - 3x^2 + 2\,ln(x)$$
★

$f)$__F__Si la posición de un móvil está dada por $p(t) = ln(t) + \frac{1}{2}t^2$, en metros, entonces la aceleración en el instante $t = 2\,s$ es $a = 4\,m/s^2$

Justificación:

$$p(t) = ln(t) + \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = p'(t) = \frac{1}{t} + t \Rightarrow a(t) = v'(t) = -\frac{1}{t^2} + 1 \Rightarrow$$

$$a(2) = -\frac{1}{2^2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} = 0.75 \neq 4$$★

(30 puntos).

(2) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para los siguientes casos:

$a)\; y = e^{x^5+1} - ln(\frac{1}{x}) + Arcsen(1 - x) + 2x^3 - \sqrt{\pi} + ln(2^5)$

Solución:

$$y = e^{x^5+1} - ln(\frac{1}{x}) + Arcsen(1-x) + 2x^3 - \sqrt{\pi} + ln(2^5) \Rightarrow$$

$$y' = (e^{x^5+1})' - \left[ln(\frac{1}{x})\right]' + (Arcsen(1-x))' + (2x^3)' - (\sqrt{\pi})' + (ln(2^5))' \Rightarrow$$

$$y' = e^{x^5+1}(x^5+1)' - \left[\frac{1}{\frac{1}{x}}\right](\frac{1}{x})' + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(1-x)' + 6x^2 - 0 + 0 \Rightarrow$$

$$y' = e^{x^5+1}(5x^4) - x\,(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1) + 6x^2 \Rightarrow$$

$$y' = 5x^4\,e^{x^5+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} + 6x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = 5x^4\,e^{x^5+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} + 6x^2 \square$$

$b)\; x^2y^3 - cos(xy) = 1 - xy^2$

Solución:

$$x^2y^3 - cos(xy) = 1 - xy^2 \Rightarrow (x^2y^3 - cos(xy))' = (1 - xy^2)' \Rightarrow$$

$$(x^2y^3)' - (cos(xy))' = (1)' - (xy^2)' \Rightarrow$$

$$2x\,y^3 + x^2\,(3y^2)\,y' - (-sen(xy))(xy)' = 0 - y^2 - x\,(2y)\,y' \Rightarrow$$

$$2x\,y^3 + 3\,x^2y^2\,y' + sen(xy)\,(y + x\,y') = -y^2 - 2x\,y\,y' \Rightarrow$$

$$2x\,y^3 + 3\,x^2y^2\,y' + y\,sen(xy) + x\,sen(xy)\,y' = -y^2 - 2x\,y\,y' \Rightarrow$$

$$(3\,x^2y^2 + x\,sen(xy) + 2x\,y)\;y' = -y^2 - y\,sen(xy) - 2x\,y^3 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-y^2 - y\,sen(xy) - 2x\,y^3}{3\,x^2y^2 + x\,sen(xy) + 2x\,y} \square$$

$c)\; (xy)^3 - x^x = \frac{y^3}{x^2} - 1$

Solución:

$$(xy)^3 - x^x = \frac{y^3}{x^2} - 1 \Rightarrow \left[(xy)^3\right]' - (x^x)' = \left[\frac{y^3}{x^2}\right]' - (1)' \Rightarrow$$

$$3\,(xy)^2\,(xy)' - x^x\,(ln(x)+1) = \left[\frac{(y^3)'x^2 - y^3\,(x^2)'}{(x^2)^2}\right] - 0 \Rightarrow$$

$$3\,(xy)^2\,(y + xy') - x^x\,(ln(x)+1) = \left[\frac{(3y^2\,y')\,x^2 - y^3\,(2x)}{(x^2)^2}\right] \Rightarrow$$

$$3\,x^2y^3\; + 3x^3y^2\,y' - x^x\,(ln(x)+1) = \left[\frac{3x^2y^2\,y' - 2x\,y^3}{x^4}\right] \Rightarrow$$

$$x^4(3\,x^2y^3\; + 3x^3y^2\,y' - x^x\,(ln(x)+1)) = 3x^2y^2\,y' - 2x\,y^3\; \Rightarrow$$

$$3\,x^6y^3\; + 3x^7y^2\,y' - x^{4+x}\,(ln(x)+1)) = 3x^2y^2\,y' - 2x\,y^3\; \Rightarrow$$

$$3x^7y^2\,y' - 3x^2y^2\,y' = x^{4+x}\,(ln(x)+1)) - 2x\,y^3\; - 3\,x^6y^3 \Rightarrow$$

$$(3x^7y^2 - 3x^2y^2)\,y'\; = x^4x^x\,(ln(x)+1)) - 2x\,y^3\; - 3\,x^6y^3 \Rightarrow$$

$$y'\; = \frac{x^4x^x\,(ln(x)+1)) - 2x\,y^3\; - 3\,x^6y^3}{3x^7y^2 - 3x^2y^2} \Rightarrow\; y'\; = \frac{x^3x^x\,(ln(x)+1)) - 2\,y^3\; - 3\,x^5y^3}{3x^6y^2 - 3x\,y^2}$$

Notemos que para obtener la derivada de x^x se hace :

$$y = x^x \Rightarrow ln(y) = x\,ln(x) \Rightarrow \frac{1}{y}\,y' = ln(x) + x\,\frac{1}{x} \Rightarrow y' = (ln(x)+1)\,y \Rightarrow$$

$$y' = (x^x)' = (ln(x)+1)\,x^x \square$$

(30 puntos)