UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 2
CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Lu 20/06/05

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __F__ Todas las rectas de ecuación $y = mx$, con m constante real, intersectan a la curva $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Justificación:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow^{y=mx} \frac{x^2}{16} - \frac{(mx)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{m^2x^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{9x^2 - 16m^2x^2}{144} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(9-16m^2)x^2}{144} = 1 \Rightarrow (9 - 16m^2)x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = \frac{144}{9-16m^2}$$

Ahora, sabemos que $x^2 \geq 0$, luego $\frac{144}{9-16m^2} \geq 0$, es decir,

$$9 - 16m^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow |\, m\,| \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$$

Observamos que los valores de m en el intervalo anterior hacen que se produzca intersección entre las curvas. Como contraejemplo, podemos considerar la recta $y = x$ $(m = 1 > \frac{3}{4})$ que no intersecta a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$★

$b)$ __F__ $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$ es una circunferencia de radio 2.

Justificación:

$$x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - y) = 1 \Rightarrow x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = 1 + \tfrac{1}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4}$$

Es un circunferencia de radio $r = \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1.12 \neq 2$★

$c)$ __F__ El valor de a para la cónica $4x^2 + y^2 - 8x = 0$ es 1.

Justificación:

$4x^2 + y^2 - 8x = 0 \Rightarrow (4x^2 - 8x) + y^2 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 2x) + y^2 = 0 \Rightarrow$

$4(x-1)^2 + y^2 = 0 + 4 \Rightarrow 4(x-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow {}^{/4}\ \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Es una elipse para la cual $a^2 = 4$, es decir, $a = 2 \neq 1$★

$d)$ __F__ El vértice de la curva $y - 1 = 2x^2 - x$ es el punto $(0, 1)$.

Justificación:

$y - 1 = 2x^2 - x \Rightarrow y - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x) \Rightarrow y - 1 + \frac{1}{8} = 2(x - \frac{1}{4})^2 \Rightarrow$

$y - \frac{7}{8} = 2(x - \frac{1}{4})^2$

Es una parábola con vértice $(h, k) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) \neq (0, 1)$★

$e)$ __F__ No existe una circunferencia con centro en $(1, -1)$ y que sea tangente a la recta $y + 2x = 0$.

Justificación:

La distancia desde el centro $C = (1, -1)$ a la recta tangente $L : y + 2x = 0$ es el radio de .la circunferencia buscada.

$r = d(C, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2(1) + 1(-1) + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Observamos, por tanto, que la circunferencia existe y tiene ecuación :

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{5}$★

$f)$__F__ Para $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ la longitud del eje mayor es 10.

Justificación:

La ecuación dada corresponde a una elipse para la cual $a^2 = 5$, es decir, $a = \sqrt{5}$, y la longitud del eje mayor es $2a = 2\sqrt{5} \neq 10$★

(30 puntos).

(2) Obtenga todos los posibles valores de $c \in \mathbb{R}$ de modo que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y $y = x + c$ se intersecten.

(15 puntos)

Solución:

Tenemos :

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (1)

$y = x + c$ (2)

Reemplazando $y = x + c$ en la ecuación (1) :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow^{y=x+c} \frac{x^2}{4} + (x+c)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 + 2cx + c^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{5x^2}{4} + 2cx + (c^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2c \pm \sqrt{(2c)^2 - 5(c^2-1)}}{\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 - 5c^2 + 5}}{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{-2c \pm \sqrt{5 - c^2}}{\frac{5}{2}}$$

Ahora para que x sea un número real, es decir, existan intersecciones, se debe tener que :

$$5 - c^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 \leq 5 \Rightarrow |\, c \,| \leq \sqrt{5} \Rightarrow -\sqrt{5} \leq c \leq \sqrt{5}$$

Los valores posibles de c son aquellos que están en el intervalo $\left[-\sqrt{5}\,,\ \sqrt{5} \right]$ ❑

(3) Grafique

$a)\; y^2 = -2x$

$b)\; x^2 + y^2 - x = 2$

$c)\; -\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

Rellene las zonas de intersección e identifique cada curva.

(15 puntos)

Solución:

Notamos que $y^2 = -2x$ es una parábola con vértice $V = (0,0)$ y $p = -\frac{1}{2}$

Por otro lado,

$x^2+y^2-x=2 \Rightarrow (x^2-x)+y^2=2 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=2+\frac{1}{4} \Rightarrow$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

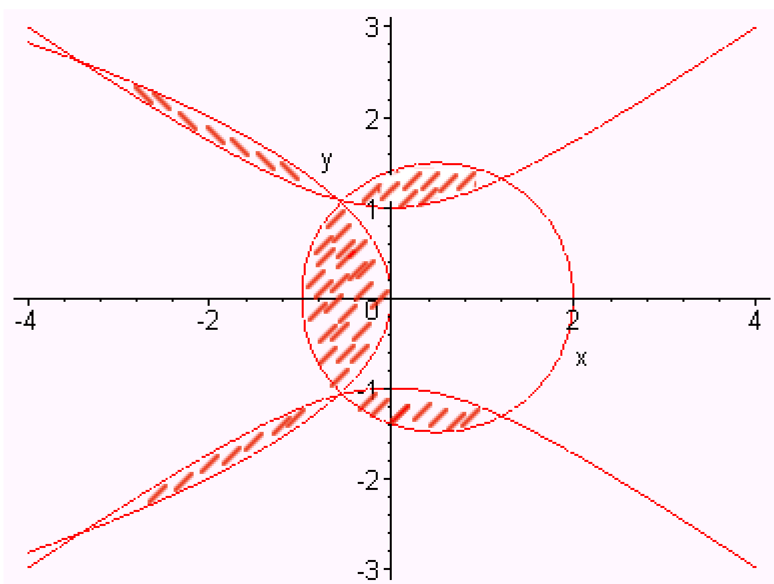
es la ecuación de una circunferencia de centro $C=(\frac{1}{2},0)$ y radio $r=\frac{3}{2}$

En tercer lugar, observamos que $-\frac{x^2}{2}+y^2=1$ es una hipérbola con vértice en $(0,0)$ y además

$a^2=1 \Rightarrow a=1$

$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$

Gráficamente :



$\square$