UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA Nº 1
CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 50 MINUTOS FECHA : Vi 03/06/05

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando TODAS sus respuestas**.

$a)$ __F__ La inecuación $|x-1| > \pi$ es válida para todos los números reales.

Justificación:
La afirmación es falsa porque $x = 1$ es un número real y $|x-1| = |1-1| = 0$ que no es mayor que $\pi \approx 3.14$★

$b)$ __F__ Las rectas $y - 1 = 3(x+1)$ y $3x - 2y = 5$ son perpendiculares.

Justificación:
Obtengamos la pendiente de la recta $y - 1 = 3(x+1)$:

$$y - 1 = 3(x+1) \Rightarrow y = 3x + 3 + 1 \Rightarrow y = 3x + 4 \Rightarrow m_1 = 3$$

Determinemos la pendiente de la recta $3x - 2y = 5$:

$$3x - 2y = 5 \Rightarrow 2y = 3x - 5 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2}$$

Luego : $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \neq -1$

Por lo tanto, las rectas no son perpendiculares.★

$c)$ __F__ El conjunto solución de $|x+1| < -1$ es $S = \left]-2, 0\right[$

Justificación:
El valor absoluto de cualquier expresión siempre es un número no negativo, por lo que jamás será menor que un número negativo. Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación $|x+1| < -1$ es $S = \emptyset$★

$d)$ __F__ El valor de k de modo que la distancia de $(-2, 3)$ a la recta $2x - 4y = k$ sea igual a 1 es 8.

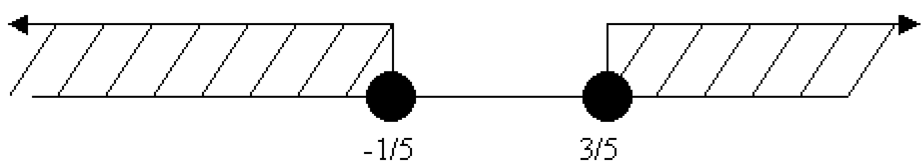
Justificación:
Si $k = 8$, entonces la recta es $2x - 4y - 8 = 0$ y la distancia del punto $(-2, 3)$ a la recta es :

$$d = \frac{|2(-2)-4(3)-8|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{|-4-12-8|}{\sqrt{4+16}} = \frac{|-24|}{\sqrt{20}} = \frac{24}{\sqrt{20}} \neq 1\bigstar$$

$e)$ __V__ Los puntos del plano $P_1 = (a, a)$ y $P_2 = (-a, a)$ están separados una distancia igual a $2a$, con a una constante positiva.

Justificación:
$d = \sqrt{(a-(-a))^2 + (a-a)^2} = \sqrt{(2a)^2 + 0^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a\bigstar$

$f)$ __F__ El intervalo



representa la solución de la inecuación $\frac{3}{5x} > 1$

Justificación:
El punto $x = 1$ pertenece al intervalo dibujado, pero $\frac{3}{5x} = \frac{3}{5(1)} = \frac{3}{5} = 0.6$ no es mayor que $1\bigstar$

(30 puntos).

(2) Resuelva las siguientes inecuaciones y dibuje la solución en la recta real

$a)$ $\sqrt{x} \geq |x-3|$

Solución:
En primer lugar, la cantidad subradical no puede ser negativa, es decir, $x \geq 0$
$\therefore\ S_1 = [0, +\infty)$

$\sqrt{x} \geq |x-3| \Rightarrow x \geq (x-3)^2 \Rightarrow x \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$

$0 \geq x^2 - 7x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 9 \leq 0$

Puntos críticos:

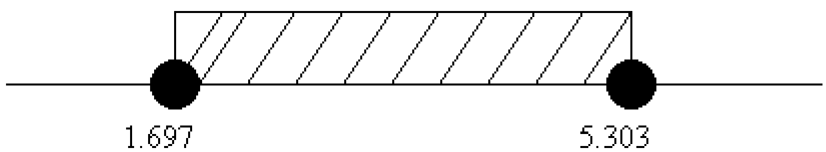
$$x^2 - 7x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \approx 5.303 \\ x_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \approx 1.697 \end{cases}$$

	$x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$
$x^2 - 7x + 9$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\therefore\ S_2 = [\,x_2\,,\,x_1] = \left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right]$$

Finalmente,

$$S = S_1 \cap S_2 = [\,0,\,+\infty) \cap \left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right] = \left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right]$$



$b)\ \ x - \pi x^2 < -1$

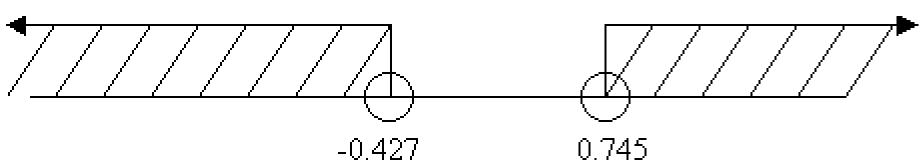
Solución:

$$x - \pi x^2 < -1 \Rightarrow -\pi x^2 + x + 1 < 0 \Rightarrow^{/(-1)} \pi x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\pi}}{2\pi} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\pi}}{2\pi} \approx 0.745 \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4\pi}}{2\pi} \approx -0.427 \end{cases}$$

	$x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$
$\pi x^2 - x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\therefore\ S = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4\pi}}{2\pi}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+4\pi}}{2\pi}\,, \infty\right)$$



(15 puntos)

(3) Sean $A = (6,1),\ B = (1,7)$ y $C = (-4,1)$ los vértices de un triángulo.
$a)$ ¿El triángulo es isósceles, escaleno o equilátero?. Justifique.
$b)$ Obtenga las coordenadas del centro de gravedad, que es el punto donde se intersectan las transversales de gravedad.
$c)$ Determine la ecuación de la altura que pasa por A

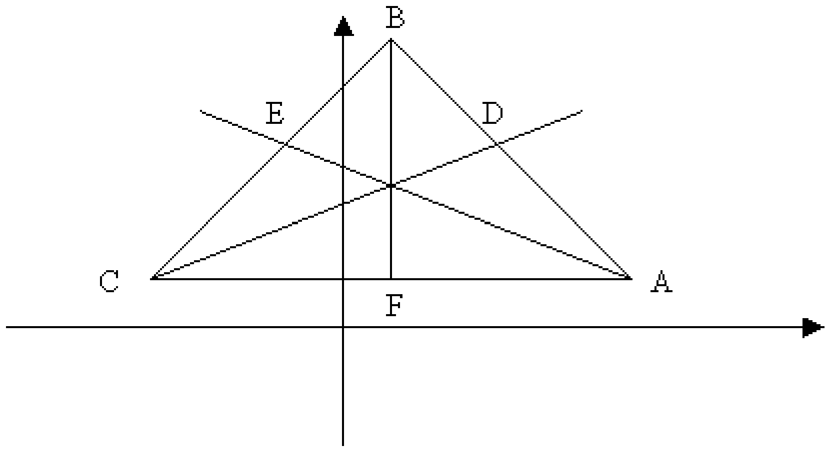
(15 puntos)

Solución:
$a)$ Calculemos las longitudes de los lados.

$$d(A,B) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$
$$d(A,C) = \sqrt{(6-(-4))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(6+4)^2 + (0)^2} = \sqrt{10^2} = 10$$
$$d(B,C) = \sqrt{(1-(-4))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (6)^2} = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$$

Luego el triángulo es isósceles, pues tiene dos lados de igual longitud.★

$b)$



Recordemos que $A = (6,1),\ B = (1,7)$ y $C = (-4,1)$
Notemos que los puntos D (punto medio entre A y B), E (punto medio entre B y C), y F (punto medio entre A y C), tienen las coordenadas siguientes :

$$D = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{8}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 4\right)$$

$$E = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$$

$$F = \left(\frac{6-4}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(1, 1\right)$$

La recta $\overline{AE}$ tiene ecuación :

$y-1=\frac{4-1}{-\frac{3}{2}-6}(x-4)\Rightarrow y-1=\frac{3}{-\frac{15}{2}}(x-6)\Rightarrow y-1=-\frac{6}{15}(x-6)\Rightarrow$

$y=-\frac{6}{15}x+\frac{36}{15}+1\Rightarrow y=-\frac{6}{15}x+\frac{51}{15}$ (1)

La recta $\overline{CD}$ tiene ecuación :

$y-1=\frac{4-1}{\frac{7}{2}-(-4)}(x-(-4))\Rightarrow y-1=\frac{3}{\frac{7}{2}+4}(x+4)\Rightarrow y-1=\frac{3}{\frac{15}{2}}(x+4)\Rightarrow$

$y-1=\frac{6}{15}(x+4)\Rightarrow y=\frac{6}{15}x+\frac{24}{15}+1\Rightarrow y=\frac{6}{15}x+\frac{39}{15}$ (2)

Igualando las ecuaciones (1) y (2) para obtener el punto de intersección :

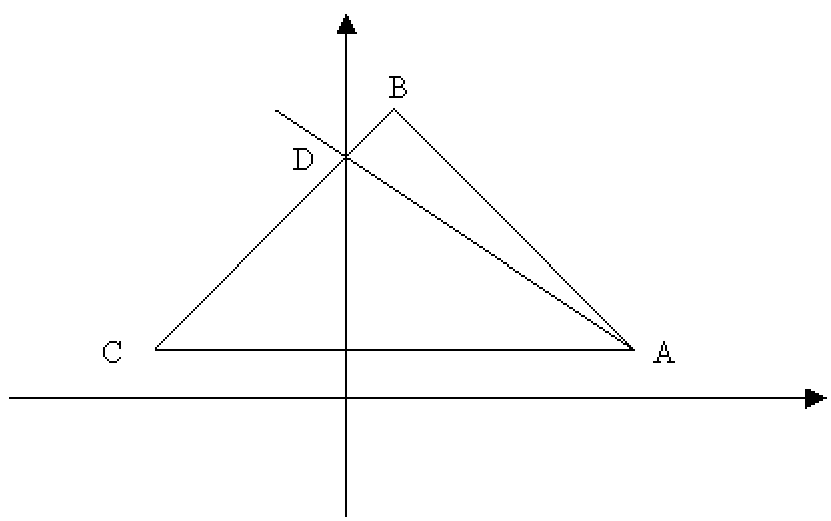
$-\frac{6}{15}x+\frac{51}{15}=\frac{6}{15}x+\frac{39}{15}\Rightarrow\frac{12}{15}x=\frac{51}{15}-\frac{39}{15}\Rightarrow\frac{12}{15}x=\frac{12}{15}\Rightarrow x=1$

De (1) : $y=-\frac{6}{15}x+\frac{51}{15}=-\frac{6}{15}(1)+\frac{51}{15}=-\frac{6}{15}+\frac{51}{15}=\frac{45}{15}\Rightarrow y=3$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad son : $\left(1,3\right)$

Falta verificar si las coordenadas del centro de gravedad satisfacen la ecuación de la recta $\overline{BF}$. En efecto, la recta $\overline{BF}$ tiene ecuación $x=1$ y claramente el punto $(1,3)$ está sobre esta recta.★

$c)$



Recordemos que $A=(6,1),\ B=(1,7)$ y $C=(-4,1)$
Sea D el punto que la perpendicular desde A forma con la recta $\overline{BC}$.
Calculemos la pendiente de la recta $\overline{BC}$: $m_1=\frac{1-7}{-4-1}=\frac{-6}{-5}=\frac{6}{5}$

Luego para que la recta $\overline{AD}$, de pendiente m_2, sea perpendicular a la recta $\overline{BC}$ se debe tener que : $m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\frac{6}{5}} = -\frac{5}{6}$

Finalmente, la ecuación de la recta $\overline{AD}$ está dada por :

$y - 1 = -\frac{5}{6}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x + 5 + 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x + 6\bigstar$