

PAUTA PRUEBA GLOBAL DE RECUPERACIÓN
CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 11/07/05**

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), justificando TODAS sus respuestas.

a) F La recta normal al gráfico de $x^3 + y^3 = 3xy$ en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ pasa por el origen.

Justificación:

Notemos, en primer lugar, que $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ es un punto de la curva $x^3 + y^3 = 3xy$.

$$x^3 + y^3 = (\frac{3}{2})^3 + (\frac{3}{2})^3 = 2 \frac{3^3}{2^3} = \frac{3^3}{2^2}$$

$$3xy = 3 \frac{3}{2} \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^2}$$

Ahora, recordemos que la ecuación de la recta normal es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ donde } f(x_0) = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$$

Calculemos $f'(x_0)$ usando derivación implícita:

$$3x^2 + 3y^2 y' = 3y + 3x y' \Rightarrow 3y^2 y' - 3x y' = 3y - 3x^2 \Rightarrow$$

$$(3y^2 - 3x) y' = (3y - 3x^2) \Rightarrow y' = \frac{(3y - 3x^2)}{(3y^2 - 3x)} \Rightarrow y' = \frac{(y - x^2)}{(y^2 - x)}$$

$$y'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{(\frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2)}{((\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2})} = \frac{\frac{3}{2}(1 - \frac{3}{2})}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2} - 1)} = \frac{(1 - \frac{3}{2})}{(\frac{3}{2} - 1)} = \frac{(-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})} = -1$$

$$\therefore y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{-1}(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = (x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow y = x$$

Es decir, la recta normal es $y = x$, que efectivamente pasa por el origen (si $x = 0$, entonces $y = 0$). $\square$

b) F La función $f(x) = x^2 \sqrt{e^{-x}}$ es continua sólo para los reales positivos.

Justificación:

Observemos que, por ejemplo, $f(-1) = (-1)^2 \sqrt{e^{-(-1)}} = \sqrt{e} \in \mathbb{R}$

Además, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \sqrt{e}$. Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \sqrt{e} = f(-1)$, es decir, f es continua en $x = -1$ que es un real negativo. $\square$

c) F La recta tangente a la gráfica de $x^2 - 2xy^2 = 3$ en el punto $(-1, 1)$, se intersecta con la recta $y = x$.

Justificación:

En primer lugar verifiquemos que el punto $(-1, 1)$ pertenezca a la curva $x^2 - 2xy^2 = 3$

$$x^2 - 2xy^2 = (-1)^2 - 2(-1)(1)^2 = 1 + 2 = 3$$

Vemos que el punto pertenece a la curva.

Calculemos la recta tangente, para ello necesitamos la primera derivada $\frac{dy}{dx}$

Derivando en forma implícita :

$$x^2 - 2xy^2 = 3 \Rightarrow (x^2 - 2xy^2)' = (3)' \Rightarrow (x^2)' - (2xy^2)' = 0 \Rightarrow$$

$$2x - (2y^2 + 2x(2y)y') = 0 \Rightarrow 2x - 2y^2 - 4xyy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x - 2y^2}{4xy} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2(x - y^2)}{4xy} \Rightarrow y' = \frac{x - y^2}{2xy} \Rightarrow y'(-1, 1) = \frac{(-1) - (1)^2}{2(-1)(1)} \Rightarrow y'(-1, 1) = \frac{-1 - 1}{-2} \Rightarrow$$

$$y'(-1, 1) = \frac{-2}{-2} \Rightarrow y'(-1, 1) = 1$$

Por lo tanto la recta tangente en el punto $(-1, 1)$ es :

$$y - 1 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 1 + 1 \Rightarrow y = x + 2$$

Veamos finalmente si la recta $y = x + 2$ intersecta a la recta $y = x$.

$$y = x + 2 \Rightarrow y = x \Rightarrow x = x + 2 \Rightarrow 0 = 2$$

Lo anterior es imposible y muestra que no hay puntos de intersección entre las rectas $y = x + 2$ y $y = x$. También habríamos podido decir que ambas rectas poseen igual pendiente ($= 1$), es decir, son paralelas y claramente no se intersectan. $\square$

d) F Las curvas $y = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$ no se intersectan.

Justificación:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.62 \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1.62 \end{cases}$$

De las dos raíces anteriores tomamos sólo la positiva porque debemos igualarla a x^2 que es un número no negativo.

$$y_1 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{y_1} = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, existen puntos de intersección. $\square$

e) F $|\pi x - e| > 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{e}{\pi}\}$

Justificación:

Para $x = -1 \in \mathbb{R} - \{-\frac{e}{\pi}\}$, se tiene que $|\pi(-1) + e| = |e - \pi| \approx 0.4233 < 1. \square$

f) F $2x^2 + 2y^2 - x - y = 0$ es una elipse.

Justificación:

$$2x^2 + 2y^2 - x - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - \frac{1}{2}x) + (y^2 - \frac{1}{2}y) = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$(x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

Es una circunferencia con centro $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ radio $r = \frac{1}{\sqrt{8}} \square$

(30 puntos).

(2) Obtenga la ecuación de la rectas tangente y normal a la cónica $3x^2 - y^2 = 3$ en los puntos para los cuales $x = 2$.

Solución:

Notemos que si $x = 2$, entonces

$$3x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 3(2)^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 12 - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 12 - 3 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow$$

$$y = \pm 3$$

Los puntos son $P_1 = (2, -3)$ $P_2 = (2, 3)$

Calculemos la derivada de y :

$$3x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow (3x^2 - y^2)' = (3)' \Rightarrow (3x^2)' - (y^2)' = 0 \Rightarrow 6x - 2y y' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{6x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{3x}{y} \Rightarrow \begin{cases} y'(2, -3) = \frac{3(2)}{-3} = -2 \\ y'(2, 3) = \frac{3(2)}{3} = 2 \end{cases}$$

a) En el punto $P_1 = (2, -3)$:

Recta tangente : $y + 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 1$

Recta normal : $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$

b) En el punto $P_2 = (2, 3)$:

Recta tangente : $y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$

Recta normal : $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \square$

(15 puntos)

(3) a) Calcule la primera derivada de la función $f(x) = 5^x - \frac{x^2-1}{\ln(x)}$

Solución:

$$f(x) = 5^x - \frac{x^2-1}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = (5^x)' - \left(\frac{x^2-1}{\ln(x)}\right)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = 5^x \ln(5) - \frac{(x^2-1)' \ln(x) - (x^2-1)(\ln(x))'}{(\ln(x))^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 5^x \ln(5) - \frac{2x \ln(x) - (x^2-1) \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 5^x \ln(5) - \frac{2x}{\ln(x)} + \frac{x^2-1}{x \ln^2(x)} \quad \square$$

b) Calcule $g'(2)$ para $g(x) = x + \sqrt{x} - 3x^4 - 3$

Solución:

$$g(x) = x + \sqrt{x} - 3x^4 - 3 \Rightarrow g'(x) = (x)' + (\sqrt{x})' - (3x^4)' - (3)' \Rightarrow$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-1/2} - 12x^3 - 0 \Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-1/2} - 12x^3$$

Por lo tanto,

$$g'(2) = 1 + \frac{1}{2}(2)^{-1/2} - 12(2)^3 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 96 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 95 \approx -94.65 \quad \square$$

(15 puntos)