UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

PAUTA TEST SUMATIVO 1.5 A SEGUNDA PRUEBA
CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS **FECHA : Lu 04/07/05**
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

1) Suponga que f y g son funciones diferenciables de x y y, y que a y b son constantes. Pruebe las siguientes propiedades :
$a)\ \nabla(af+bg) = a\,\nabla f + b\,\nabla g$ $\quad b)\ \nabla(f\cdot g) = f\nabla g + g\,\nabla f$

<u>Solución:</u>
$a)\ \nabla f = \ < f_x, f_y > \ ;\ \nabla g = \ < g_x, g_y >$

$$a\,\nabla f + b\,\nabla g = a\ < f_x, f_y > \ + b < g_x, g_y > \ = \ < af_x + bg_x, af_y + bg_y >$$

$$\nabla(af+bg) = \ < (af+bg)_x, (af+bg)_y > \ = \ < af_x + bg_x, af_y + bg_y >$$

$$\therefore\ a\,\nabla f + b\,\nabla g = \nabla(af+bg)\square$$

$b)$ Tenemos que :

$$f\nabla g + g\,\nabla f = f < g_x, g_y > \ + g < f_x, f_y > \ =$$

$$< fg_x.fg_y > \ + \ < gf_x, gf_y > \ = \ < f\,g_x + g\,f_x, f\,g_y + g\,f_y >$$

Ahora :

$$\nabla(f\cdot g) = \ < (f\cdot g)_x, (f\cdot g)_y > \ = \ < f_x\,g + f\,g_x\ ,\ f_y\,g + f\,g_y > \ =$$

$$< f\,g_x + g\,f_x, f\,g_y + g\,f_y >$$

Luego
$\nabla(f\cdot g) = f\nabla g + g\,\nabla f\square$

(05 puntos).

2) La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2, R_3 conectadas en paralelo está dada por: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Calcule $\frac{\partial R}{\partial R_1}, \frac{\partial R}{\partial R_2}$

Solución:

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}$

Derivando implícitamente con respecto a R_1

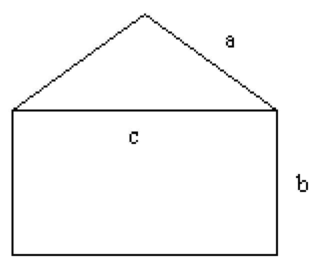
$-R^{-2}\frac{\partial R}{\partial R_1} = -R_1^{-2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_1^{-2}}{R^{-2}} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}$

Derivando con respecto a R_2 la situación es idéntica, es decir

$-R^{-2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = -R_2^{-2} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_2^{-2}}{R^{-2}} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2}$ ❑

(05 puntos).

3) Se forma un pentágono ubicando un triángulo isósceles sobre un rectángulo. Si el pentágono tiene perímetro fijo P, calcule los lados del pentágono que maximizan su área.



Solución:

Sea h la altura del triángulo. Ahora, dado que el triángulo es isósceles la altura corta el lado c en dos partes iguales, así usando el teorema de pitágoras:

$$a^2 = h^2 + (\tfrac{c}{2})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

El área del triángulo es : $A_1 = \frac{1}{2}\,c\,h = \frac{1}{2}\,c\,\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{1}{4}\,c\,\sqrt{4a^2 - c^2}$

El área del rectángulo es : $A_2 = b\,c$

El área del pentágono es : $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4}\,c\,\sqrt{4a^2 - c^2} + b\,c$

Ahora usaremos multiplicadores de Lagrange para resolver el problema con

$f(a,b,c) = \frac{1}{4}\,c\,\sqrt{4a^2 - c^2} + b\,c$

$g(a,b,c) = 2a + 2b + c = P$

Así

$f_a = \frac{1}{4}\,c\,\frac{1}{2}\left(4a^2 - c^2\right)^{-1/2}(8a) = \frac{ac}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$

$g_a = 2$

$f_b = c$

$g_b = 2$

$f_c = \frac{1}{4}\ \sqrt{4a^2 - c^2} + \frac{1}{4}\, c\, \frac{1}{2}\big(4a^2 - c^2\big)^{-1/2}\,(-2c) + b =$

$\frac{1}{4}\ \sqrt{4a^2 - c^2} - \frac{c^2}{4\sqrt{4a^2-c^2}} + b =$

$g_c = 1$

$$\therefore\ \nabla f = \nabla g \Rightarrow \begin{cases} \frac{ac}{\sqrt{4a^2-c^2}} = 2\lambda & (1) \\ c = 2\lambda & (2) \\ \frac{1}{4}\ \sqrt{4a^2-c^2} - \frac{c^2}{4\sqrt{4a^2-c^2}} + b = \lambda & (3) \end{cases}$$

De (1) y (2):

$\frac{ac}{\sqrt{4a^2-c^2}} = c \Rightarrow^{c\neq 0} a = \sqrt{4a^2 - c^2} \Rightarrow a^2 = 4a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = 3a^2 \Rightarrow$

$c = \sqrt{3}\, a \qquad (4)$

De (2) y (3) usando (4) :

$\frac{a}{4} - \frac{3a^2}{4a} + b = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a + \frac{a}{2} \Rightarrow b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\, a \quad (5)$

Reemplazando (4) y (5) en la condición $g(a,b,c) = P$:

$2a + 2b + c = P \Rightarrow 2a + (1+\sqrt{3})\, a + \sqrt{3}\, a = P \Rightarrow 3a + 2\sqrt{3}\, a = P \Rightarrow$

$a = \frac{P}{3+2\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{(2\sqrt{3}-3)\, P}{3}$

Por lo tanto :
$b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\, a \Rightarrow b = \frac{(1+\sqrt{3})}{2}\ \frac{(2\sqrt{3}-3)\, P}{3} \Rightarrow b = \frac{(3-\sqrt{3})\, P}{6}$

Finalmente
$c = \sqrt{3}\, a \Rightarrow c = \sqrt{3}\ \frac{(2\sqrt{3}-3)\, P}{3} \Rightarrow c = (2-\sqrt{3})\, P$ ❑

(05 puntos).