

PAUTA TEST N° 3
CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 50 MINUTOS **FECHA : Mi 18/05/05**
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

- 1) La temperatura T en una bola metálica es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el que coincide con el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es 120°
Obtenga la tasa de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$
(20 puntos).

Solución:

La distancia desde el centro de la bola es $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, con (x, y, z) un punto de la bola. Luego,

$$T(x, y, z) = \frac{k}{d} \Rightarrow T(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ahora, sabemos que la temperatura en $(1, 2, 2)$ es 120° , así

$$T(1, 2, 2) = \frac{k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 120 \Rightarrow k = 120 \sqrt{9} \Rightarrow k = 120 (3) \Rightarrow k = 360$$

$$\therefore T(x, y, z) = \frac{360}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 360 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Nos piden calcular la tasa de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia $(2, 1, 3)$, es decir, en la dirección

$$v = \langle 2 - 1, 1 - 2, 3 - 2 \rangle = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

Haciendo el vector v unitario obtenemos

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle 1, -1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$$

Calculemos ∇T :

$$\nabla T = \langle T_x, T_y, T_z \rangle = \langle -\frac{1}{2}(360)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x),$$

$$-\frac{1}{2}(360)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2y), -\frac{1}{2}(360)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2z) > =$$

$$-360(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} < x, y, z >$$

Luego,

$$\nabla T(1, 2, 2) = -360(1^2 + 2^2 + 2^2)^{-3/2} < 1, 2, 2 > =$$

$$-360(9)^{-3/2} < 1, 2, 2 > = -\frac{40}{3} < 1, 2, 2 >$$

Finalmente,

$$D_u T(1, 2, 2) = \nabla T(1, 2, 2) \cdot u = -\frac{40}{3} < 1, 2, 2 > \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, -1, 1 > =$$

$$-\frac{40}{3\sqrt{3}}(1 - 2 + 2) = -\frac{40}{3\sqrt{3}} \quad \square$$

2) Muestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede ser escrito como $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1$.
(20 puntos).

Solución:

La ecuación del plano tangente a una superficie de nivel $F(x, y, z) = k$ en el punto (x_0, y_0, z_0) está dada por :

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Ahora

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{2x_0}{a^2} ; F_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{2y_0}{b^2} ; F_z(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0}{c^2}$$

Por lo tanto,

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \left(\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \text{elipsoide}$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1 \quad \square$$

3) Calcule las dimensiones de una caja rectangular de máximo volumen tal que la suma de las longitudes de sus 12 aristas es una constante $2c$.

(20 puntos).

Solución:

Sean x , y , z las dimensiones de la caja rectangular. Entonces

$$4x + 4y + 4z = 2c \Rightarrow 2x + 2y + 2z = c \quad (1)$$

y el volumen V es:

$$V = xyz \quad (2)$$

Despejando z de la ecuación (1) :

$$z = \frac{c}{2} - x - y \quad (3)$$

Reemplazando en la ecuación (2) :

$$V(x, y) = xy \left(\frac{c}{2} - x - y \right) = \frac{c}{2} xy - x^2 y - x y^2 ; \text{ con } x > 0, y > 0$$

Luego

$$V_x = \frac{c}{2} y - 2xy - y^2 ; \quad V_y = \frac{c}{2} x - x^2 - 2xy$$

$$V_x = 0 \Rightarrow \frac{c}{2} y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y \left(\frac{c}{2} - 2x - y \right) = 0 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow 2x + y = \frac{c}{2}$$

$$V_y = 0 \Rightarrow \frac{c}{2} x - x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x \left(\frac{c}{2} - x - 2y \right) = 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x + 2y = \frac{c}{2}$$

Por lo tanto, el sistema a resolver es :

$$2x + y = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow$

$$x + 2y = \frac{c}{2} \quad / \cdot -2$$

$$\begin{aligned}
 2x + y &= \frac{c}{2} \\
 \Rightarrow -3y &= -\frac{c}{2} \Rightarrow y = \frac{c}{6} \\
 -2x - 4y &= -c
 \end{aligned}$$

$$\text{Además, } x + 2y = \frac{c}{2} \Rightarrow x = \frac{c}{2} - 2y \Rightarrow x = \frac{c}{2} - \frac{c}{3} \Rightarrow x = \frac{c}{6}$$

De la ecuación (3) :

$$z = \frac{c}{2} - x - y \Rightarrow z = \frac{c}{2} - \frac{c}{6} - \frac{c}{6} \Rightarrow z = \frac{c}{2} - \frac{c}{3} \Rightarrow z = \frac{c}{6}$$

$\therefore$ el punto crítico es $P = \left(\frac{c}{6}, \frac{c}{6}, \frac{c}{6}\right)$

Veamos ahora si P es un punto de máximo o de mínimo.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)=\left(\frac{c}{6}, \frac{c}{6}\right)} = \begin{vmatrix} -2y & \frac{c}{2} - 2x - 2y \\ \frac{c}{2} - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}_{(x,y)=\left(\frac{c}{6}, \frac{c}{6}\right)} = \\
 &= \begin{vmatrix} -2\frac{c}{6} & \frac{c}{2} - 2\frac{c}{6} - 2\frac{c}{6} \\ \frac{c}{2} - 2\frac{c}{6} - 2\frac{c}{6} & -2\frac{c}{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{c}{3} & \frac{c}{2} - 2\frac{c}{3} \\ \frac{c}{2} - 2\frac{c}{3} & -\frac{c}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{c}{3} & -\frac{c}{6} \\ -\frac{c}{6} & -\frac{c}{3} \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{36} = \frac{c^2}{12} > 0$$

$$\text{y } V_{xx}\left(\frac{c}{6}, \frac{c}{6}\right) = -2\frac{c}{6} = -\frac{c}{3} < 0$$

Finalmente concluimos que $P = (x, y, z) = \left(\frac{c}{6}, \frac{c}{6}, \frac{c}{6}\right)$ es punto de mínimo. $\square$