

PAUTA TEST N° 2
CÁLCULO III
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Lu 02/05/05**
PROFESOR: *Juan Carlos Sandoval Avendaño*

1) Si f y g son funciones diferenciables de una variable, muestre que la función $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ es solución de la ecuación de la onda.

(30 puntos).

Solución:

Recordemos que la ecuación de la onda es :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Debemos mostrar que $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ es solución de la ecuación de la onda, es decir, satisface tal ecuación.

Sean $w = x + at$ y $v = x - at$. Luego $u(x, t) = f(w) + g(v)$.

$$u_t = \frac{\partial (f(w) + g(v))}{\partial t} = \frac{df}{dw} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dg}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{df}{dw} - a \frac{dg}{dv} = a f'(w) - a g'(v)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial (a f'(w) - a g'(v))}{\partial t} = \frac{\partial u_t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 f''(w) + a^2 g''(v) \Rightarrow$$

$$u_{tt} = a^2 (f''(w) + g''(v))$$

Por otro lado y de forma similar :

$$u_x = \frac{\partial (f(w) + g(v))}{\partial x} = \frac{df}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dg}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{df}{dw} + \frac{dg}{dv} = f'(w) + g'(v)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial (f'(w) + g'(v))}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f''(w) + g''(v) \Rightarrow$$

$$u_{xx} = f''(w) + g''(v)$$

$$\therefore u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \square$$

2) Sea f una función homogénea de grado n , es decir, $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, $\forall t$, n entero positivo. Verifique que f satisface la ecuación:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

(30 puntos).

Solución:

Se tiene que f es una función homogénea de grado n , es decir,

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \quad (1)$$

$\forall t$, n entero positivo.

Sean $w = tx$ y $v = ty$.

Derivando ambos lados de (1) con respecto a t :

$$\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial t} = \frac{\partial (t^n f(x, y))}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial f(w, v)}{\partial t} = \frac{\partial (t^n f(x, y))}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f(w, v)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = n t^{n-1} f(x, y) \Rightarrow$$

$$x \frac{\partial f(w, v)}{\partial w} + y \frac{\partial f(w, v)}{\partial v} = n t^{n-1} f(x, y)$$

La última igualdad es válida para todo t real, en particular para $t = 1$:

$$x \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (tx)} + y \frac{\partial f(tx, ty)}{\partial (ty)} = n t^{n-1} f(x, y) \Rightarrow \stackrel{t=1}{\Rightarrow}$$

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = n f(x, y) \quad \square$$